# Tópicos Especiais em Matemática II

Profª Drª Rogéria Gaudencio do Rêgo
rogeria@mat.ufpb.br

Curso de Licenciatura em Matemática – **UFPB**VIRTUAL
Ambiente Virtual de Aprendizagem: Moodle (www.ead.ufpb.br)
*Site* da **UFPB**VIRTUAL: www.virtual.ufpb.br
*Site* do curso: www.mat.ufpb.br/ead
Telefone **UFPB**VIRTUAL (83) 3216 7257

**Carga horária: 60 horas** **Créditos: 04**

## Ementa

A introdução à linguagem algébrica; as operações algébricas; a Álgebra e a Geometria; a construção de conceitos geométricos.

## Descrição

Os conhecimentos que o aluno constrói ao longo de sua vida originam-se inicialmente de suas relações imediatas com o mundo e, desta forma, são predominantemente fruto de sua percepção física em um primeiro momento para, posteriormente, na medida em que os processa ou os relaciona com outros conhecimentos já elaborados, se transformarem e ganharem dimensão mais abstrata.

É de suas relações com os processos de contagem, medida, ações práticas de junção, divisão, entre outras, ou a observação das inúmeras formas e usos do número no cotidiano, que o conhecimento aritmético do aluno inicialmente se constitui. Do mesmo modo, é por meio da percepção de formas, posições, tamanhos e outras propriedades de natureza concreta dos objetos que nos cercam, que surgem as bases de seu pensamento geométrico.

O pensamento algébrico tem, entretanto, natureza um pouco diferente, uma vez que no princípio se materializa como generalizações que o aluno processa em relação às observações que realiza envolvendo elementos matemáticos de natureza aritmética ou geométrica. Os elementos algébricos só serão manipulados em operações ou transformações matemáticas quando ele alcançar maturidade suficiente nesse campo específico de conhecimento, o que demanda não apenas tempo, mas escolhas didático-metodológicas adequadas por parte do professor, considerando não só as especificidades desse tipo de pensamento, mas a realidade na qual está inserido o aluno.

Deste modo, ampliando as discussões que iniciamos na disciplina Tópicos Especiais em Matemática I, na qual tratamos de alguns conteúdos da Aritmética, aqui iremos trazer elementos para sua reflexão teórica e sugestões de ação para sua prática, como futuro docente, decorrentes de pesquisas já realizadas nos campos da Álgebra e da Geometria, trabalhados nas séries finais do Ensino Fundamental.

Certamente não é possível tratarmos aqui de todos os conteúdos ou possibilidades de abordá-los em sala de aula, em razão das limitações que a disciplina tem, considerando diversos aspectos, mas esperamos que o aqui apresentado se constitua como uma frutífera semente para outras investigações que realizar sobre o conhecimento que o aluno irá construir, com sua ajuda e mediação, nos dois ramos da Matemática abordados nesta Disciplina.

Além deste texto base, serão disponibilizados na Plataforma materiais diversos, a exemplos de sugestões de jogos; indicação de dissertações e teses que versam sobre o tema; dicas sobre livros ou endereços da Internet, para facilitar o acesso dos cursistas que desejarem ampliar sua formação docente ou que pretendem dar continuidade à sua qualificação, em cursos de Especialização, Mestrado ou Doutorado, os quais exigem uma boa carga de leitura na área na qual se intenciona realizar uma pesquisa.

Aqui destacamos, como o fizemos na disciplina anterior, que consideramos como base para a construção do conhecimento do aluno os princípios construtivistas, compreendendo que a aprendizagem se processa por meio da organização mental de ações efetuadas sobre objetos concretos (não apenas no sentido material, mas concretos também mentalmente) aumentando-se, gradativamente, o nível de abstração, generalização e formalização de seu pensamento. A interação social é, em nossa perspectiva, fundamental para o processo, uma vez que a socialização de ideias e experiências pessoais constitui uma fonte rica de conhecimentos, contendo elementos que ampliarão o pensamento matemático do grupo.

Na perspectiva construtivista, o papel do professor, ao contrário do que equivocadamente pensam algumas pessoas, é ainda mais importante do que em um processo de ensino com características tradicionais, centrado no professor. Quando atua como mediador, o professor precisa realizar a difícil tarefa de se colocar no lugar do outro, neste caso, do aluno, e refletir sobre as limitações e potencialidades que este carrega consigo para a sala de aula. Ao se colocar como facilitador de um processo que é interno e pessoal no outro, faz-se necessário refletir como ele aprende e, portanto, qual o melhor percurso didático-metodológico a ser seguido.

Embora seja um campo de natureza predominantemente abstrata, ações realizadas com o auxílio de materiais concretos manipulativos têm grande importância e alguns serão sugeridos no texto, os quais poderão ser adaptados ou complementados com outros que o cursista irá encontrar em suas pesquisas ou na interação com os colegas. Como nos casos de indicação de materiais para conteúdos aritméticos, sua utilização deverá ocorrer de forma planejada, para que os alunos possam ampliar sua capacidade de pensar matematicamente os fenômenos que observa e ser capaz de, seguro de sua capacidade de fazê-lo, intervir e transformar positivamente a realidade que o cerca. Também nesse ramo de conhecimento da Matemática, o ensino é estruturado por meio da formação inicial de modelos, imagens e esquemas, resultantes das ações executadas pelo aluno, sobre os quais os professores atuarão, melhorando os níveis de aprendizagem e a relação dos alunos com a disciplina.

Mais uma vez destacamos os cuidados necessários para o trabalho com o material concreto em sala de aula, a exemplo do tempo inicial para exploração do mesmo; da determinação de objetivos claros e pertinentes por parte do professor; da garantia do espaço para socialização de formas de raciocínio, questionamentos, procedimentos e conclusões pelos alunos e da produção de textos matemáticos quando do registro individual ou coletivo do conhecimento elaborado. Os diferentes processos e estratégias, formais ou informais, utilizados em sala de aula no momento da proposição de problemas ou desafios, devem ser respeitados e discutidos, em termos de limitações e potencialidades, o que permitirá ao aluno enxergar novas maneiras de ver um mesmo objeto ou fenômeno, enriquecendo sua formação e visão do mundo.

Os materiais de apoio às atividades aqui sugeridas podem ser confeccionados com itens de baixo custo (cartolina, emborrachado, cartão, cola branca, fitas adesivas, entre outros) e de fácil obtenção. Algumas das propostas aqui apresentadas já são conhecidas da maior parte dos educadores, mas foram lembradas em razão de seu grande valor pedagógico.

## Objetivos

Nesta Unidade do Curso, apresentaremos sugestões de atividades que estão voltadas para o desenvolvimento de conceitos específicos de Matemática e de habilidades que visam ampliar a formação geral do aluno, explorando-se: (i) sua capacidade de expressão e comunicação de ideias matemáticas; (ii) estratégias de resolução de problemas; (iii) a concentração, raciocínio, perseverança e criatividade; (vi) a troca de ideias em atividades de grupo e (vii) a compreensão de regras e a formação de conceitos matemáticos nos campos da Álgebra e Geometria.

## Unidades Temática Integradas

### Unidade I A introdução à linguagem algébrica

Nesta Unidade abordamos a natureza do conhecimento algébrico e exploramos os elementos básicos pertinentes ao processo de construção do pensamento relativo a esse campo, pelo aluno, discutindo questões de natureza cultural e didático-metodológicas a ele inerentes e sugerindo atividades diversas.

### Unidade II As operações algébricas

Nesta Unidade apresentamos sugestão de material didático manipulativo, com o qual o professor poderá desenvolver atividades voltadas para o trabalho com as operações algébricas básicas envolvendo monômios e polinômios, destacando as vantagens de seu uso para a construção de um conhecimento algébrico significativo.

### Unidade III A relação entre Álgebra e Geometria

Nesta Unidade fazemos uma breve discussão acerca das relações entre a Álgebra e a Geometria, considerando aspectos históricos e didático-metodológicos. Trazemos elementos relativos ao ensino de Geometria no Brasil e discutiremos as consequências de seu abandono, ocorrido nas últimas décadas do século XX. Na sequência, tratamos da importância do pensamento geométrico na formação do aluno.

### Unidade IV A construção do pensamento geométrico

Nesta Unidade apresentamos sugestões de atividades utilizando materiais manipulativos diversos, com os quais o professor poderá explorar a construção de conceitos geométricos. Discutimos de forma ampla aspectos didático-metodológicos do ensino de Geometria, considerando que diversos conteúdos específicos deste campo de conhecimento já foram estudados de modo conteudinal em outras disciplinas do Curso. Na sala de aula, as indicações presentes no texto podem nortear o planejamento das aulas envolvendo Geometria, pensando-se em um processo de ensino que vise uma aprendizagem significativa.

# Unidade I A introdução à linguagem algébrica

## 1. Situando a temática

O que é a Álgebra? A Álgebra no Ensino Fundamental está relacionada a compreensão do significado das “letras” (comumente denominadas variáveis) e das operações com elas. Dizemos que os alunos estão estudando Álgebra quando encontram variáveis pela primeira vez. Essa pode ser uma passagem difícil, dependendo de como o trabalho didático é realizado, mas o professor poderá colaborar com o desenvolvimento de um tipo de pensamento que ampliará a capacidade do aluno modelar problemas matemáticos, realizar abstrações e generalizações.

A Álgebra ensinada no Ensino Fundamental tem uma conotação bastante diferente daquela ensinada nos cursos superiores de Matemática e a introdução ao seu estudo deverá levar em consideração aspectos diversos, como destacaremos no texto. Na disciplina Tópicos Especiais de Matemática I tivemos a oportunidade de discutir conteúdos pertinentes à Aritmética e esses são fundamentais para o desenvolvimento do pensamento algébrico do aluno, uma vez que muito do que estudamos em Álgebra compreende uma forma de generalização das ideias relativas aos números.

## 2. Problematizando a Temática

Para facilitar nossa compreensão acerca das diferentes maneiras como podemos conceber a Álgebra, Usiskin (1995) nos propõe observar as seguintes equações (todas na mesma forma – constituídas pelo produto de dois números igual a um terceiro):

1) $A = b.h$
2) $40 = 50x$
3) $\text{sen}x = \cos x.\ \text{tg}\ x$
4) $1 = n\ (1/n)$
5) $y = kx$

O autor observa que comumente denominamos expressões do tipo (1) de fórmula; (2) de equação; (3) de identidade; (4) de propriedade e (5) de equação de uma função que indica uma proporcionalidade direta. Esses diversos nomes traduzem os vários usos da ideia de variável. Em (1), A, b e h representam a área, base e altura de um retângulo qualquer, respectivamente, e têm caráter de coisa conhecida. Em (2) tendemos a pensar em x como incógnita, valor a ser determinado. Em (3), x é o argumento de uma função. A equação (4), ao contrário das outras, generaliza um modelo aritmético e n identifica um exemplo. Em (5), x é mais uma vez o argumento de uma função, y seu valor e k uma constante e somente neste último caso há o caráter de variabilidade, do qual resulta o termo “variável”.

As concepções de variável mudaram com o tempo. Hoje pensamos em uma variável simplesmente como um símbolo que pode ser substituído pelos elementos de um determinado conjunto. Muitos alunos acham que todas as variáveis são letras que representam números. Contudo, os valores assumidos por uma variável não são sempre números. As variáveis podem representar pontos (na Geometria), funções (na Análise), proposições (na Lógica), matrizes ou vetores (na Álgebra Linear), entre outros. Os alunos podem também acreditar que uma variável é sempre uma letra ou objeto matemático e expressões como: $3 + x = 7$ e $3 + \quad = 7$ são, em geral, consideradas “coisas da Álgebra”, ao passo que 3 + __ = 7 ou 3 + ? = 7, não, embora tanto o traço quanto a interrogação comportem-se como um valor a ser determinado.

O professor pode ter o mesmo raciocínio e não ter o devido cuidado, ainda que inconscientemente, com o primeiro contato que o aluno tem com o raciocínio algébrico, ainda nas séries iniciais do Ensino Fundamental, o que demanda cuidados particulares, alguns dos quais discutiremos adiante.

## 3. Conhecendo a Temática

### 3.1 As diversas concepções sobre a Álgebra

As finalidades do ensino de Álgebra, as concepções que temos desse campo da matemática e a utilização de variáveis estão estreitamente relacionadas entre si. As finalidades da Álgebra são determinadas pelas diferentes concepções que temos dela e que correspondem às diferentes importâncias relativas dadas aos diversos usos das variáveis. De acordo com Usiskin (1995), há basicamente quatro diferentes concepções acerca da Álgebra com as quais convivemos e que influenciam não apenas nossa forma de ver este ramo de conhecimento da Matemática, mas afeta a forma como nós, professores, desenvolvemos este conteúdo em sala de aula, quais atividades, procedimentos e metodologias priorizamos.

*Concepção 1 – A Álgebra como aritmética generalizada.*

Essa concepção está presente, por exemplo, no modelo da análise de padrões no ensino das operações com números inteiros (como estudamos na disciplina Tópicos I); ou quando trabalhamos a obtenção de equações a partir de valores numéricos gerados quando da análise da relação entre duas variáveis – tabela de valores numéricos. Nesse caso, as variáveis são usadas como elementos generalizadores de modelos. Dentro desta concepção as ações que priorizaríamos em sala de aula estariam voltadas para o desenvolvimento das capacidades de traduzir relações e realizar generalizações, com base na observação de padrões.

*Concepção 2 – A Álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas.*

Para facilitar a compreensão da segunda concepção, Usiskin (1995) pede que consideremos a seguinte questão: *adicionando-se 7 ao quádruplo de um número obtemos 35. Que número é esse?* Na concepção de Álgebra como geradora de modelos, nosso problema estaria resolvido quando obtivéssemos a equação correspondente. Pensando na Álgebra como ferramenta para resolver problemas, estaríamos apenas começando nossa tarefa quando isso ocorresse.

Muitos alunos têm dificuldade para trabalhar com a codificação da linguagem usual para a linguagem matemática, assim como na passagem da Aritmética para a Álgebra. Nesta concepção de Álgebra, as variáveis são incógnitas. Se adotamos esse tipo de concepção, as atividades às quais daríamos destaque seriam vinculadas à simplificação e resolução de problemas de aplicação.

*Concepção 3 – A Álgebra como estudo de relações entre grandezas.*

Para o autor acima citado, se escrevemos a fórmula A = b.h (representando a relação entre a área A de um retângulo e o produto de sua base b pela altura h), estamos expressando a relação entre três grandezas e não temos a sensação de estar lidando com incógnitas, pois não temos que determinar nenhum valor numérico específico. Para entender melhor a diferença entre esta concepção e as anteriores basta pensar na dificuldade que alguns alunos sentem frente à pergunta: o que ocorre com o valor de 1/x quando x se torna cada vez maior? Não pedimos para determinar o valor de x (x não é, portanto, uma incógnita), mas para que ele descreva o comportamento geral do elemento matemático envolvido. Há um modelo a ser generalizado, mas não é um modelo que se pareça com qualquer modelo da Aritmética. Trata-se de um modelo fundamentalmente algébrico e, por esta razão, muitos educadores acham que a Álgebra deveria ser introduzida através dessa utilização do conceito de variável. Nessa concepção, a atividade fundamental a ser desenvolvida estaria baseada no ato de relacionar, utilizando-se as variáveis como parâmetros.

*Concepção 4 – A Álgebra como estudo das estruturas.*

A última concepção é relativa ao estudo da Álgebra nos cursos superiores, que envolve estruturas como Grupos, Anéis, Corpos e Espaços Vetoriais. Para Usiskin (1995), as variáveis nessa concepção representam sinais arbitrários que são manipulados visando *justificar* (o que constituiria a principal ação nessa concepção) propriedades que atribuímos às operações com números reais, polinômios, entre outros. Tal concepção foge de nosso interesse, uma vez que a discussão aqui apresentada refere-se à Educação Básica e, neste momento, às séries finais do Ensino Fundamental.

Podemos cristalizar algumas questões importantes no ensino e na aprendizagem da Álgebra inserindo-as no quadro de concepções da Álgebra e usos das variáveis, concepções que se alteraram com a explosão das aplicações da Matemática e com a presença dos computadores. Não podemos mais classificar a Álgebra apenas como Aritmética generalizada, pois ela é bem mais que isso e embora continue sendo um importante instrumento para resolver problemas, vai também além desta dimensão. Ela fornece meios para se desenvolverem e se analisarem relações e é uma peça chave para a caracterização e compreensão das estruturas matemáticas.

Para o pesquisador já citado, por estas razões e pela crescente presença da Matemática na sociedade, é natural que a Álgebra seja hoje uma área fundamental de estudo nos ensinos Fundamental e Médio e que essa posição de destaque provavelmente perdure por muito tempo.

**Ampliando seu Conhecimento**

CURIOSIDADE: a origem da palavra "álgebra" difere bastante da etimologia da palavra "aritmética", que vem do grego arithmos ("número"). Álgebra compreende a adaptação, para o latim, da palavra árabe al-jabr, presente no título do livro, “Hisab al-jabr w'al-muqabalah”, escrito pelo matemático árabe Mohammed ibn-Musa al Khowarizmi (cujo nome deu origem à palavra “algarismo”), por volta do ano de 825. A tradução literal do título deste trabalho de álgebra seria "ciência da restauração (ou reunião) e redução".

## 3.2 O ensino de Álgebra no Brasil

A introdução da Álgebra nos currículos brasileiros ocorreu no ano de 1799 e até a década de 1960 seu estudo apresentava um caráter predominantemente instrumental, voltado apenas para a aplicação na resolução de problemas e de equações.

Nas décadas de 1960 e 1970, com o domínio da Matemática Moderna no Brasil, destacaram-se no ensino as estruturas abstratas em diversas áreas da Matemática, especialmente na Álgebra. A intenção era aprofundar o rigor lógico, contrapondo a compreensão aos aspectos operativos e manipulativos da Matemática, com ênfase na linguagem e conceitos básicos da Teoria dos Conjuntos. Nessa perspectiva, na Álgebra o rigor poderia ser mais facilmente alcançado, em contraposição a áreas como Geometria.

A partir do final da década de 1970, houve o reconhecimento de que as mudanças que haviam sido introduzidas não provocaram os efeitos planejados. A substituição da Geometria pela Álgebra provocou um esvaziamento de conteúdos e de situações desafiadoras, tendo sido retomadas as discussões acerca das tendências presentes e a busca de formas mais adequadas de se enfrentar os novos desafios do ensino de Matemática (OZÁMIZ, 2005). Após o fracasso da Matemática Moderna, tem-se tentado resgatar o antigo papel instrumental e formativo desse ramo de conhecimento e muitas pesquisas têm sido direcionadas ao estabelecimento de uma melhor compreensão acerca de como se aprende e, consequentemente, como devemos ensinar Álgebra.

Nos livros didáticos e nas salas de aula brasileiras, tem prevalecido o ensino de técnicas de manipulação e de transformações algébricas e a memorização de regras e fórmulas sem sentido para o aluno. A Álgebra é trabalhada como um conjunto de conhecimentos não transferíveis ou aplicáveis a outras situações que não sejam as padrões, trabalhadas pelo professor.

Em sala de aula, as principais atividades desenvolvidas compreendem:

i) A simplificação de expressões algébricas;

ii) A resolução de equações;

iii) A aprendizagem de regras e procedimentos mecânicos para a manipulação de símbolos.

A consequência dessa postura para o ensino/aprendizagem de Álgebra incide na memorização de procedimentos considerados apenas como operações sobre sequências simbólicas e na resolução de problemas artificiais sem significado para o aluno. A avaliação é feita de acordo com a capacidade que o aluno manifesta em operar corretamente a sequência de símbolos e não de acordo com a compreensão dos conceitos e do raciocínio matemático que possui (KAPUT, 1999).

De acordo com Meira, “o fato de privilegiarmos o ensino de regras e procedimentos gerais pode ser a causa de muitas das dificuldades enfrentadas por nossos alunos na aprendizagem da Álgebra, o que reduziria sua capacidade de compreensão de seus conceitos centrais. Além disso, os problemas abordados quando desse estudo são, em geral, artificiais e sem significado para o aluno”. (MEIRA, 2006)

Para provocar mudanças qualitativas no quadro atual, os principais objetivos do ensino de Álgebra devem ser possibilitar que os alunos desenvolvam a capacidade de produzir significados para os conhecimentos algébricos e a pensar algebricamente. A habilidade técnica para lidar com os elementos algébricos deve ser uma consequência dessas duas capacidades e não o contrário.

Em geral, observa-se que as principais dificuldades dos alunos residem, entre outras, em:

(i) lidar com representações simbólicas, em geral sem significado, realizando com elas processos que não levam, necessariamente, a soluções numéricas. O aluno não aceita, por exemplo, que expressões como 3x ou x+y possam ser respostas a situações-problema dadas;

(ii) compreender a sintaxe própria da Álgebra, de modo a perceber que 3a + a + 10 = 4a + 10, mas que a + a x 3 não é 2a x 3; que 2ab – 2a não é igual a b; que 10a – a não resulta em 10, entre outros;

(iii) Fazer uma extensão da Aritmética, sem compreender as semelhanças e diferenças entre os dois campos, como no que diz respeito:

- ao uso de letras (na Aritmética, 5m representaria 5 metros, mas na Álgebra poderia significar 5 vezes o número de metros);

- ao uso de parênteses, cuja necessidade é, em geral, ignorada por muitos alunos. Ex: em *ab*, se *a* for substituído por *–a* torna-se *–ab*. Mas se *b* for substituído por *–b*, não se torna *a – b*, mas *a(–b);*

- a utilização de métodos não convencionais de resolução de problemas, cujas limitações podem levar a dificuldades no estabelecimento de métodos formais e mais gerais (FEY, 1990; BOTH, 1995; MEIRA, 1996; ARAÚJO, 1999).

O desafio compreende, então, encontrar formas que possibilitem o acesso ao desenvolvimento do pensamento algébrico a todos os alunos, em uma aprendizagem baseada na compreensão. Autores diversos que lidam com investigações voltadas para a melhoria do processo de ensino-aprendizagem da Álgebra, apresentam as seguintes sugestões (FIORENTINI, FERNÁNDEZ e CRISTOVÃO, 2006; MEIRA, 2006)):

(1) Realizar atividades voltadas para a construção do pensamento algébrico do aluno desde cedo, uma vez que a Álgebra, mais que um instrumento técnico-formal para resolver problemas é, antes de tudo, uma “forma específica de pensamento e de leitura do mundo”. As capacidades de pensar genericamente, perceber regularidades e explicá-las, estabelecer relações e comparações são características do pensamento algébrico e podem ser desenvolvidas pelo aluno antes que ele domine a linguagem simbólica;

(2) Diversificar as situações de aplicação da Álgebra como ferramenta de modelagem em contextos que possibilitem a identificação, por parte do aluno, de quando e de como usar seus conhecimentos algébricos;

(3) Promover a integração da Álgebra com os demais campos matemáticos e, sempre que possível, com outras disciplinas, em aplicações;

(4) Reconhecer que existem diversos modos de pensamento algébrico;

(5) Desenvolver atividades de investigação e a resolução de problemas utilizando a Álgebra como ferramenta e justificando o raciocínio empregado;

(6) Promover hábitos de pensamento e de representação, envolvendo a capacidade de generalização, sempre que possível;

(7) Tratar os números e as operações algebricamente, valorizando não apenas os dados numéricos presentes mas, principalmente, as relações existentes entre eles.

Deste modo, o desenvolvimento do pensamento algébrico decorre do trabalho com incógnitas e variáveis, fórmulas e análise de padrões traduzidos em uma linguagem específica, para a qual o aluno atribuirá significado.

## 3.3 A introdução à linguagem algébrica

Para situar a passagem da linguagem aritmética para a algébrica, vamos inicialmente resolver os seguintes problemas sem usar Álgebra (por meio da Aritmética ou de um diagrama, por exemplo):

1) Em uma turma, 3/5 dos alunos são meninas. Dobrando-se o número de meninos e acrescentando-se 6 meninas, o número de meninos e meninas passa a ser igual. Quantos alunos havia na sala inicialmente? (Extraído do livro: *As idéias*[1] *da Álgebra*, organizado por Albert Shulte. São Paulo: Atual, 1995).

2) Bárbara tem 8 anos de idade e seu pai tem 38. Ambos aniversariam no mesmo dia. Quando a idade do pai será o triplo da idade de Bárbara?

SOLUÇÕES: para o primeiro problema, vamos representar o total de alunos por uma barra retangular, a qual dividiremos em cinco partes iguais, para representarmos graficamente a primeira informação (que 3/5 dos alunos são meninas - porção cinza da figura).

Figura 1

Registrando a informação de que precisamos acrescentar mais 6 integrantes (os quais representamos por seis círculos, como indicado na Figura 2) ao grupo inicial de meninas (que indicamos com os três quadrados cinza), resta-nos saber a quantas bolas corresponde cada quadrado.

Sabemos que o total de meninas, depois de acrescentarmos mais seis, é igual ao número de meninos, depois que dobramos a quantidade inicial deles, ou seja, as quantidades representadas à direita (Figura 2) e à esquerda (Figura 3) são iguais.

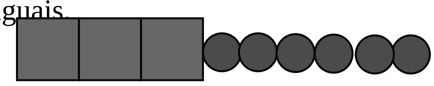


Figura 2

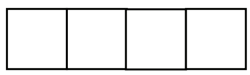


Figura 3

Como a quantidade de meninos e de meninas em cada quadrado é a mesma (já que dividimos a turma em cinco partes iguais), se eliminarmos os três quadrados cinza da Figura 2 e três dos quadrados brancos da Figura 3, descobrimos que um quadrado equivale a 6 bolas, ou seja, cada quadrado corresponde a 6 alunos. Assim, multiplicando por 6 cada quadrado do retângulo inicial, descobrimos que o total inicial era de 30 alunos e, desse total, 18 eram meninas (3/5) e doze eram meninos (2/5).

Vamos conferir se nosso cálculo está correto: 18 meninas mais 6 meninas é igual a 24 meninas, que corresponde ao dobro inicial do número de meninos, que era 12.

[1] A grafia foi mantida de acordo com o original, por se tratar de livro escrito antes da atual Reforma Ortográfica.

Para resolver o segundo problema pensaremos aritmeticamente, organizando os valores envolvidos na forma de pares ordenados. Dessa maneira, o par com as idades iniciais seria (8, 38); após um ano, teríamos o par (9, 39) e nos anos seguintes os pares (10, 40), (11, 41), (12, 42), (13, 43), e assim por diante. Para saber qual par satisfaz a condição final, ou seja, é solução do problema, basta verificar em qual deles o segundo número é o triplo do primeiro. Continuando a registrar os pares, verificamos que o que nos interessa é o par (15, 45), e a resposta do problema é que a idade do pai será o triplo da idade de Bárbara quando ela tiver 15 anos.

Mas é difícil para quem já estudou Álgebra imaginar formas de resolver os problemas propostos que não seja por meio do uso de x e de y e, embora para nós professores, esse processo seja relativamente fácil, a transposição de dados da linguagem usual, na qual são propostos os problemas, para a linguagem matemática e, aqui, em particular, a linguagem algébrica, não é um processo tão natural quanto acreditamos.

Poderíamos, em um primeiro instante, pensar que as duas formas de resolução apresentadas são limitadas e pouco práticas, mas ambas envolvem maneiras extremamente interessante e ricas de raciocinar e, se praticadas com frequência pelo aluno, constituem ferramentas poderosas para resolver inúmeros problemas matemáticos ou do cotidiano, adequando-se às especificidades das situações. A representação gráfica auxilia a visualização e organização dos dados, além de facilitar a determinação da solução. A representação dos números em pares ordenados, não apenas estimula a capacidade do aluno para perceber padrões (numéricos, nesse caso), mas irá prepará-lo para lidar com a representação de pontos no plano cartesiano.

A análise de padrões é, por exemplo, a base proposta para a introdução à linguagem algébrica, feita por Daniela Padovan, autora de livros didáticos para o Ensino Fundamental, no Plano de Aula apresentado no sítio na Revista Nova Escola:

http://revistaescola.abril.com.br/matematica/pratica-pedagogica/introdução-algebra-429106.shtml

Nele a autora propõe jogos, atividades de análise de padrões numéricos e geométricos e a resolução de problemas utilizando balanças, visando introduzir o estudo da Álgebra de maneira contextualizada, buscando minimizar os efeitos da passagem da linguagem concreta da Aritmética para a linguagem abstrata da Álgebra. Visite o site e leia as sugestões da autora, ampliando seu acervo metodológico neste campo de conhecimento.

Para ampliar a habilidade do aluno na transposição da linguagem usual, na qual são propostos os problemas, para a linguagem algébrica, segue abaixo a sugestão de um material didático que pode ser utilizado em desafios diversos em sala de aula, conforme indicações dadas.

BARALHO ALGÉBRICO:

Material: confeccionar pares de cartas (no tamanho de cartas de baralho), de modo que em uma das cartas esteja escrita a expressão na linguagem usual e na outra, a expressão algébrica correspondente, como nos seguintes pares dados como exemplos: [(dobro de um número) e (2x); (metade de um número) e ( b/2); (sucessor de um natural) e (n + 1); (triplo de um número) e (3b); (dobro de um número somado à sua metade) (2m + m/2); (a quarta parte de um número) e (x/4), etc – os exemplos podem ser ampliados com expressões retiradas do livro-texto ou elaboradas pelo professor]. Confeccionar cerca de 25 pares. É importante variar as letras utilizadas nas expressões, para que os alunos compreendam que o importante em uma expressão algébrica não é a letra, mas o que ela representa.

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Triplo de um número** | **3x** | **Dobro do sucessor de um número** | **2 (b+1)** |

Uma vez confeccionadas as cartas, elas podem ser utilizadas da seguinte forma:

1) Em um “jogo da memória” (para até cinco participantes): as cartas são embaralhadas e organizadas em linhas e colunas sobre uma mesa, com a parte escrita virada para baixo. Na sua vez de jogar o aluno desvira duas cartas e verifica se elas formam um par. Em caso afirmativo, ele fica com as duas cartas para si e joga novamente, parando apenas de jogar quando as duas cartas desviradas não formarem um par. Neste caso, elas são novamente viradas sobre a mesa e o aluno passa a vez para o próximo participante. As jogadas seguintes seguem as mesmas regras, até que todas as cartas sejam retiradas da mesa, ganhando o jogador que conseguir juntar maior número de cartas.

2) No “jogo do mico” (para até cinco participantes): confeccionar uma carta a mais, com a figura de um macaco (o mico), e acrescentá-la ao baralho. As cartas são embaralhadas e distribuídas entre os participantes. O número de cartas de cada participante não precisa ser necessariamente o mesmo, mas deve seguir a melhor distribuição possível.

Uma vez com suas cartas na mão, cada participante verifica se há algum par entre as cartas. Neste caso, coloca-o na mesa, para que os demais alunos confiram se a associação está correta. As demais permanecem na mão e, no sentido horário, cada aluno, na sua vez de jogar, deve puxar uma carta do próximo jogador, verificando se fez ou não um novo par com a carta que acabou de puxar, realizando o descarte já indicado sobre a mesa. Se isso não ocorrer, a carta é colocada na mão, junto com as demais. O jogo prossegue até todos os pares serem encontrados, restando apenas a carta do mico. Quem ficar com ela será o perdedor da rodada.

Para enriquecer o jogo, propor que os alunos criem problemas envolvendo algumas das cartas e o coloquem como desafio para um colega, para que este o resolva. Eles podem ainda criar novas cartas, com outras expressões da linguagem comum e sua tradução para a linguagem algébrica. Ou criar novos jogos envolvendo as cartas do baralho algébrico, elaborando e discutindo as regras geradas.

### 3.4 Obtendo o valor numérico de expressões algébricas

Uma vez que os alunos estão suficientemente familiarizados com a passagem de uma expressão na linguagem usual para sua representação na linguagem algébrica, podemos propor atividades práticas visando o desenvolvimento da habilidade de obtenção de valores numéricos a partir de expressões algébricas dadas, o que pode ser feito por meio de um jogo denominado “Corrida algébrica”, substituindo os exercícios tradicionalmente propostos no livro texto.

Material: tabuleiro constituído por uma trilha com uma casa de saída e outra de chegada e, entre elas, diversas casas preenchidas com expressões algébricas, como as sugeridas no exemplo abaixo; 1 dado comum e um marcador para cada jogador.

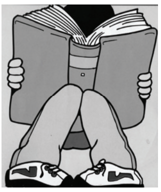
Exemplo de expressões a serem escritas uma em cada casa da trilha: $2x$; $3b + 1$; $4x – 3$; $3a$; $x^2 – 2x$; $3y – 2$; $3c$; $- x + 3$; $-2m + 4$; $3c – 1$; $- a$; $6 – n$; $4 + z$; $8 – x$; $- g + 6$; $b^2 – b + 1$; $2z – 4$; 5 (ou outros números, preparando-o para lidar com valores constantes, que independem de variáveis); $t – 2t$; $3 + a$; $-2f$; etc. O número de casas da trilha pode variar, devendo ser em torno de 30.

Podem participar do jogo até cinco jogadores, cada um com um marcador que será colocado, no início do jogo, na casa de saída. Na sua vez de jogar, o aluno lança o dado e anda, quando estiver na saída, o número de casas nele indicado. A partir da segunda jogada, o valor sorteado deverá ser assumido pela variável que estiver na casa em que se encontra o marcador. Por exemplo, se o marcador caiu, após a jogada anterior, na casa “$8 – x$”, e o valor sorteado na jogada foi 5, o jogador avança 3 casas (pois $8 – 5 = 3$). Se com a substituição o valor resultante é negativo, o jogador volta tantas casas quanto indicadas pelo resultado. Ou seja, se o marcador está, por exemplo, na casa “$-x + 3$” e o valor sorteado foi 6, ele volta três casas, pois ($-6 + 3 = -3$).

Ganha o jogo quem alcançar primeiro a casa de chegada, depois de percorrer a trilha (ou pode-se estabelecer que será o primeiro a alcançar a casa de chegada, depois de dar duas ou três voltas no tabuleiro).

OBSERVAÇÃO: se os alunos ainda não estudaram as operações com números negativos, as casas envolvendo possibilidades dessa natureza podem ser suprimidas do tabuleiro, sem prejuízo da atividade. Se já estudaram, essa é uma boa oportunidade para verificar se ainda há dúvidas quanto às operações envolvendo tais tipos de número e tentar saná-las.

## Dialogando e Construindo Conhecimento



DICA: um outro jogo envolvendo o mesmo princípio (Corrida algébrica II) se encontra na pasta de textos complementares (visite-a com frequência) e pode ser trabalhado com os alunos em sala de aula ou em atividades extraclasse, como em um Clube de Matemática ou uma Feira de Ciências.

## 4. Avaliando o que foi construído

Na avaliação do conteúdo trabalhado no Plano de Aula da Revista Nova Escola indicado no item 3.3, Daniela Padovan propõe a seguinte atividade:

Traduzir para a linguagem algébrica os problemas dados em seguida e, depois, resolvê-los.

a. A soma de dois números é 16 e um é o triplo do outro. Determine-os.

b. O dobro de um número multiplicado por 3 é igual a 36. Qual é esse número?

c. Júlia e João colecionam adesivos. Júlia tem 138 adesivos a menos que João. Quantos adesivos tem João, se Júlia tem 289?

d. A soma das idades de 4 irmãos é 84 anos. Qual a idade de cada um, sabendo que a cada dois anos nascia um irmão?

e. Um número natural excede em 12 a um múltiplo de 5. Qual é o resto de sua divisão por 3?

Tente, em seguida, depois de atender ao desafio da autora, resolvê-los de outra maneira que não seja algebricamente, de pelo menos uma maneira, registrando suas respostas.

## 5.Referências


BOTH, Lesley R. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: COXFORD, Arthur, SHULTE, Albert (org.). *As idéias*[2] *da álgebra*. São Paulo: Atual, 1995

FEY, J. Quantity. In: STEEN, L (org) *On the shoulders of giants: new approaches to numeracy.* Washington: Nacional Academy, 1990

FIORENTINI, Dario; FERNÁNDEZ, Luís P. F.; CRISTOVÃO, Eliane M. *Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico*. http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/temporario/SEM-LB/Fiorentini-Fernandes-Cristovao2.doc

KIERAN, C. The learning and teaching of school algebra. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan, 1992


[2] A grafia foi mantida de acordo com o original, por se tratar de livro escrito antes da atual Reforma Ortográfica.

LINS, Rômulo C., GIMENEZ, Joaquim. Perspectiva em aritmética e álgebra para o século XXI. Campinas, SP: Papirus, 1997

MEIRA, Luciano. *Educação algébrica e resolução de problemas.* http://www.tvebrasil.com.br/salto/boletins2003/eda/tetxt2.htm (janeiro, 2006)

MIGUEL; FIORENTINI, D.; MIORIM, A. *Álgebra ou geometria: para onde pende o pêndulo?* Pró-posiçoes, V.3. Campinas, SP: Unicamp, 1992

OZÁMIZ, Miguel de Guzman. *Tendências innovadoras en educacion matematica.* http://www.oei.es/edumat.htm (junho, 2005)

USISKIN, Zalman. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: COXFORD, Arthur, SHULTE, Albert (org.). *As idéias*[3] *da álgebra*. SP: Atual, 1995.

[3] Idem

## Unidade II As operações algébricas

### 1. Situando a Temática

Sabemos que as lacunas na formação aritmética do aluno implicarão em dificuldades para a realização de generalizações ou representação de padrões em regras algébricas. Além disso, a passagem da linguagem usual e/ou aritmética para a algébrica, demanda maturidade e tempo. Vale destacar ainda que entraves específicos surgem quando do trabalho com as operações envolvendo polinômios, uma vez que não parece fazer sentido para o aluno, somar ou multiplicar letras, entre outras operações possíveis.

### 2. Problematizando a Temática

Diante das considerações postas, o professor se questiona como poderá ajudar o aluno a construir seu conhecimento algébrico, atribuindo-lhe significado e, mais ainda, tornando-o aplicável a outros campos do conhecimento matemático (como, por exemplo, à Geometria) ou ao cotidiano, permitindo-lhes resolver problemas diferentes daqueles propostos em sala de aula.

Se em relação a outros conteúdos, o professor precisa estar atento às especificidades daquilo que irá ensinar, considerando seus objetivos e possibilidades didático-metodológicas, no trabalho com as operações algébricas isso não poderia ser diferente e talvez os cuidados precisem ser redobrados, em razão de tudo o que aqui já foi exposto.

Mas para mudar o quadro atual, no qual estão pintados em cores fortes as dificuldades de aprendizagem de nossos alunos, o professor precisa se abrir para abordagens diferentes das que vem utilizando, uma vez identificando que estas não têm surtido o efeito desejado. Seu receio em modificar sua prática, em particular utilizando materiais manipulativos, reside em achar que demandará muito tempo de aula ou que os alunos irão ficar agitados demais. As primeiras experiências certamente serão menos naturais, mas o professor crescerá profissionalmente agindo como um pesquisador, que se coloca questões acerca do que faz e se propõe respondê-las não apenas refletindo teoricamente, mas buscando soluções também na prática.

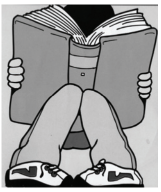
### 3. Conhecendo a Temática

### 4. O uso de algeplacas na realização de operações algébricas

O texto a seguir compreende a apresentação de um material didático denominado em português de algeplacas e em inglês de algeblocks, com inúmeras sugestões de atividades disponíveis em sítios de língua inglesa, especialmente. O material foi apresentado pela primeira vez em um encontro de Psicologia de Educação Matemática, em Lisboa, no ano de 1994, e suas peças envolvem o conceito de área de figuras planas simples, como quadrados e retângulos, estudado pelos alunos do Ensino Fundamental ainda nas séries iniciais deste nível de escolaridade. As experiências relatadas por professores que já fizeram uso do material em sala de aula apontam na direção de resultados bastante significativos, compreendidos por uma melhor compreensão das operações algébricas, às quais os alunos passam a atribuir significado, uma vez que as ações realizadas com o material, e a reflexão sobre elas, possibilitam a construção de modelos mentais sobre os quais o aluno poderá realizar generalizações e formalizações.

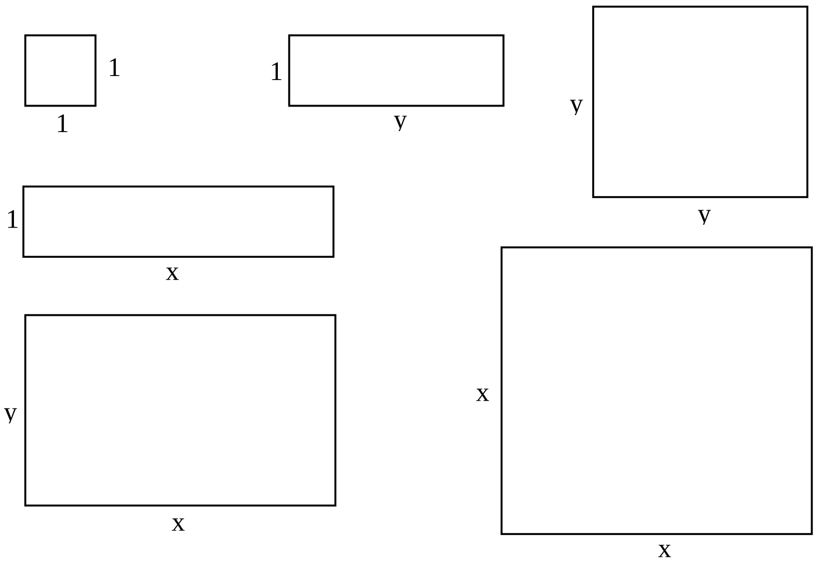
Quando isso não acontece, o professor se vê obrigado a repetir ou rever constantemente conteúdos já estudados, pois o que prevaleceu à época de seu estudo compreendeu apenas o uso da memorização de regras sem sentido. Além disso, conteúdos como Fatoração de polinômios ficam mais fáceis de serem posteriormente trabalhados com os alunos. O que inicialmente parece tomar tempo, uma vez que a execução de atividades com materiais manipulativos requer um ritmo de ação muito mais elaborado por parte do professor e da turma, do que demanda uma aula tradicional - onde o professor copia informações no quadro, as lê para a turma e explica um conjunto de exercícios do tipo padrão-, mas compreenderá um investimento na qualidade do que se faz em termos de ensino e de aprendizagem, no curto, médio e longo prazos.

## Dialogando e Construindo Conhecimento



DICA: passeie na Internet à procura de endereços com sugestões de atividades de exploração das algeplacas (ou algeblocks), para ampliar seu conhecimento acerca desse rico material, aumentando sua confiança em seu uso na sala de aula. O endereço abaixo (em inglês), por exemplo, é bastante interessante. http://www.lessonplanet.com/search?keywords=algeblocks&rating=3&search_type=related).

*MATERIAL UTILIZADO:* cartolinas de duas cores (por exemplo, branca – neste caso a área da figura é computada positivamente nas expressões; cinza – a área da figura é computada negativamente nas expressões, ou seja, é subtraída). O material é recortado de forma a se obter quadrados e retângulos em cinco tamanhos distintos, como indicado abaixo (cortar as figuras nas cartolinas das duas cores) (Observação: veja na Plataforma o arquivo com o padrão para ser impresso em duas cores de papel tamanho A4 e recortado para uso nas atividades.).



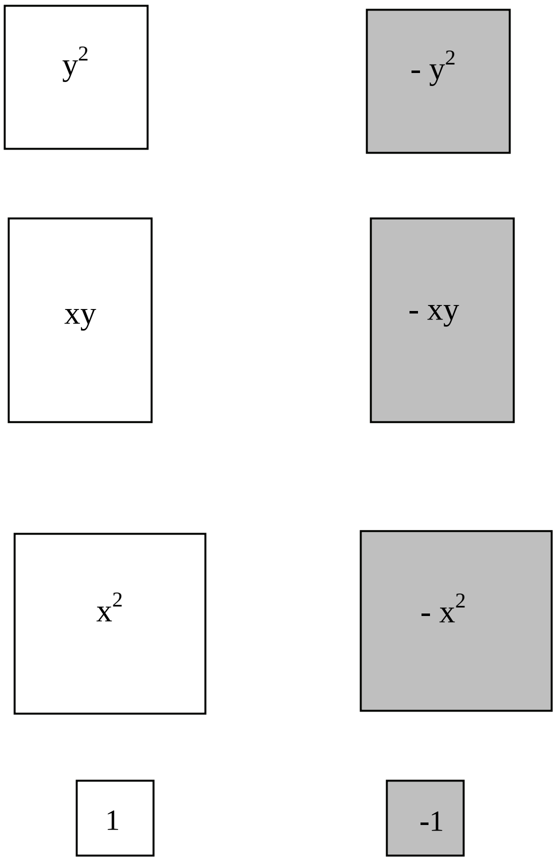

OBSERVAÇÃO: o número 1 apenas indica que esta será a unidade de comprimento (evitar usar 1 cm), do mesmo modo, evitar usar medidas inteiras para x e y e evitar tomar a medida de y como múltipla da de x, para que os alunos não estabeleçam relações equivocadas entre as peças.

PROCEDIMENTO: inicia-se solicitando aos alunos que identifiquem a área de cada figura, em função das medidas dos lados dos retângulos, indicados por números ou letras, para que possam realizar os procedimentos de codificação e decodificação algébrica com base nas placas. Se o quadrado tem lados com medidas iguais a x unidades de comprimento, sua área será igual a $x^2$ unidades quadradas; se tem lados iguais a y unidades de comprimento, o quadrado terá $y^2$ unidades de área; se os lados do quadrado são iguais a uma unidade de comprimento, sua área será 1 unidade quadrada; se a figura é um retângulo e seus lados são iguais a x e y unidades de comprimento, sua área será dada por x.y unidades quadradas. É importante lembrar aos alunos que, embora nas expressões sejam indicados apenas elementos como x, $x^2$ ou y, estes indicam os valores de áreas e que na representação tiveram as unidades suprimidas.

Uma vez preparado o material (quadrados e retângulos de cartolina), propor situações que visam responder às questões: dado um conjunto qualquer de peças, como representar algebricamente os seus elementos? E dada a representação algébrica de um conjunto de peças, qual o material concreto correspondente, ou seja, quais as peças que serviram de base para a representação algébrica?

Inúmeras expressões podem ser apresentadas aos alunos, como: $4x^2 + 2y + 1$; $2xy + 3y$; $-x^2 + 4$; $3y^2 + 8x - 6$; $y^2 - xy$, entre outras. Após fazer diversas ações de codificação, o professor deverá trabalhar com os casos de cancelamento de áreas, que se dá através da junção de peças iguais em tamanho e forma, porém de cores diferentes. É importante destacar que não se está trabalhando com áreas negativas (o que não existe), mas que se está somando ou subtraindo o valor correspondente às áreas das figuras, dependendo de sua cor.

Assim, juntando-se duas figuras de mesma forma e tamanho, em cores diferentes, uma cancelará a outra, uma vez que o mesmo valor para a área será somado e subtraído na expressão:




$y^2 - y^2 = 0$

$xy - xy = 0$

$x^2 - x^2 = 0$

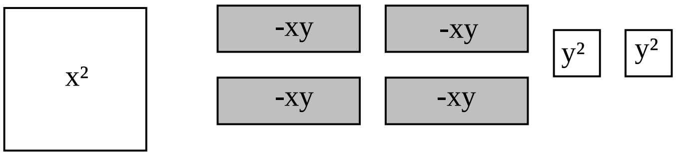
$1 - 1 = 0$

O caminho inverso deve ser proposto aos alunos, ou seja, apresentar-lhes expressões algébricas, às quais deverão ser associadas as peças que foram codificadas, podendo-se propor que realizem desafios para os colegas, tanto envolvendo a ação de codificação (dos blocos para a expressão algébrica) quanto de decodificação (da expressão algébrica para os blocos). Para realizar operações com polinômios, como os apresentados como exemplo, utiliza-se o mesmo conjunto base de cartões.

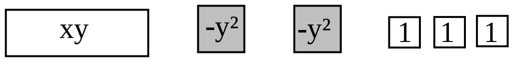
## 3.1. A adição de polinômios

Para adicionar dois ou mais polinômios, representar com os cartões cada polinômio separadamente e, em seguida, juntar todas as peças, verificando se há cancelamentos a serem feitos (isto é, se há pares de peças de mesma forma e tamanho e cores diferentes, os quais serão retirados na junção dos polinômios) ou agrupamentos de peças iguais (em tamanho, forma e cor), para facilitar a escrita da expressão, que ficará com todos os termos semelhantes reunidos, obtendo uma expressão reduzida.

Por exemplo, para realizar a adição: $(x^2–4xy+2y^2) + (xy - 2y^2 + 3)$, primeiro representamos com as placas os dois polinômios, como indicado abaixo, e em seguida processamos os ajustes necessários (agrupamentos de termos semelhantes ou cancelamentos), gerando o resultado apresentado em seguida.

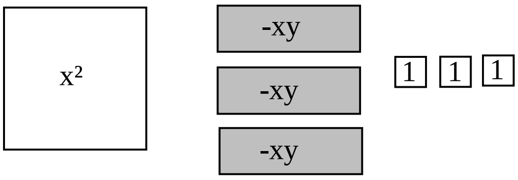



Acima, representação do primeiro polinômio




Acima, representação do segundo polinômio

Após realizar os cancelamentos possíveis (um xy do primeiro polinômio com o -xy do segundo e um dos dois $y^2$ do primeiro polinômio com o $-y^2$ do segundo), obtêm-se:



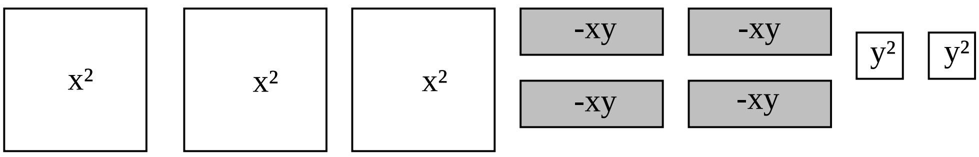

Que pode ser codificado como: $(x^2– 3xy + 3)$, resultado da adição.

Propor outras situações envolvendo a adição, para que o aluno as solucione com o apoio do material manipulativo e, depois, fazer com que ele encontre o resultado das adições, apenas algebricamente, conferindo, caso necessário, seu resultado com o uso das algeplacas.

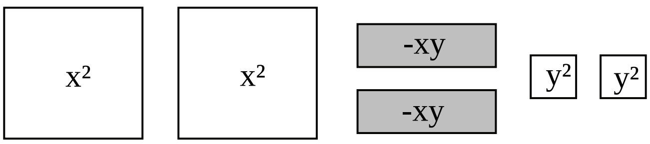
## 3.2. A subtração de polinômios

Para realizar a subtração de um polinômio de outro, primeiro representamos os dois com as algeplacas e invertemos as cores de todas as peças do segundo polinômio e procedemos como no caso da adição, uma vez que transformamos a subtração em uma adição, invertendo o sinal de cada algeplaca do segundo polinômio.

Por exemplo, para realizarmos a subtração: $(3x^2–4xy+2y^2) – (2x^2–2xy+y^2)$, representamos o primeiro polinômio $(3x^2–4xy+2y^2)$ e o segundo. Antes de realizar a operação, invertemos a cor de cada algeplaca do segundo polinômio, trocando $(2x^2–2xy+y^2)$ por $(-2x^2+2xy-y^2)$ e realizando a adição $(3x^2–4xy+2y^2) + (-2x^2+2xy–y^2)$ que resulta em $(x^2-2xy+y^2)$.

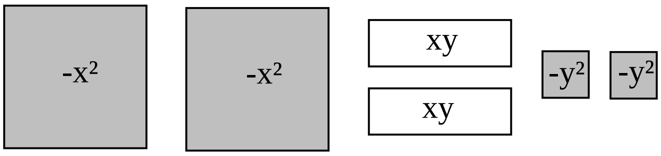



Acima, representação do primeiro polinômio com as algeplacas.

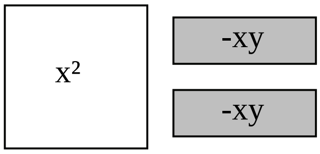



Acima, representação do segundo polinômio.

Após inversão das cores desse último polinômio, obtêm-se:




O polinômio, depois de ser invertido, é adicionado ao primeiro e, após os agrupamentos de termos semelhantes e cancelamentos possíveis, obtém-se:

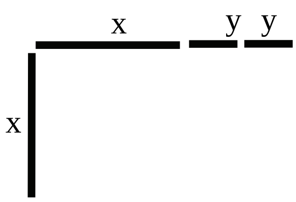



Trabalhar diversos exemplos com os alunos, para que eles realizem a operação com o auxílio do material manipulativo, a partir das quais possam levantar hipóteses e elaborar generalizações, e possam operar posteriormente sem o uso das algeplacas.

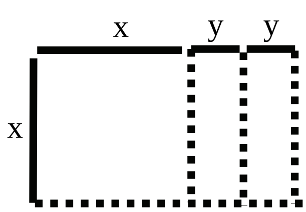
OBSEVAÇÃO: para facilitar a inversão do sinal das placas da segunda expressão, na subtração, pode-se trabalhar com placas com uma face branca e outra cinza.

## 3.3 A multiplicação de polinômios

Para a multiplicação, trabalharemos com o cálculo de área de figuras compostas pelas algeplacas. Assim, para resolver a operação: (x).(x + 2y), procuramos determinar a área de um retângulo cujos lados são iguais a x e a (x + 2y). Ou seja, o aluno procurará preencher a região com lados indicados como abaixo, respeitando-se as linhas de fronteira de cada peça.

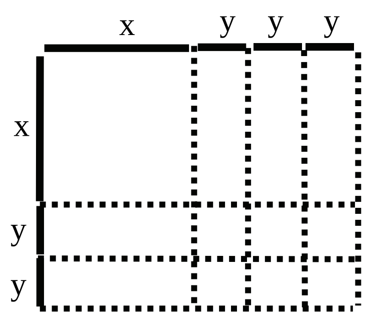



Para obter a solução, basta imaginar linhas paralelas traçadas nas extremidades dos segmentos da figura, perpendiculares a estes, e preencher com as algeplacas que tem as dimensões indicadas (ou seja, com as algeplacas $x^2$ e xy - mais especificamente, uma do primeiro tipo e duas do segundo).




Observando o resultado do cálculo da área do retângulo composto pelas algeplacas, temos: $x \cdot (x + 2y) = x^2 + xy + xy = x^2 + 2xy$. Como nos casos das operações de adição e subtração, é importante que o aluno vivencie diversas situações distintas, de modo a entender a operação e poder realizá-la sem o apoio do material concreto, posteriormente.

Considerando mais um exemplo, (x+3y) e (x+2y), segue, representando-se os lados e realizando os prolongamentos necessários,  que se apresenta na figura abaixo.




Deste modo, o resultado do produto entre (x+3y) e (x+2y) é, conforme indicado pelas algeplacas que preencherão os espaços entre as linhas tracejadas: $x^2 + 5xy + 6y^2$, mesmo resultado que obteríamos se realizássemos a distributividade, ou seja,

$$(x+3y).(x+2y) = x^2 + 2xy + 3xy + 6y^2 = x^2+5xy+6y^2.$$

É importante lembrar que na multiplicação e divisão de polinômios não faz sentido envolver, nos exemplos representados concretamente com as algeplacas, valores negativos, o que não ocorre quando trabalhamos apenas com as expressões, sem nos preocuparmos com sua representação concreta. As operações envolvendo valores negativos decorrerão das generalizações que o aluno fará a partir das ações realizadas com as algeplacas com valores positivos.

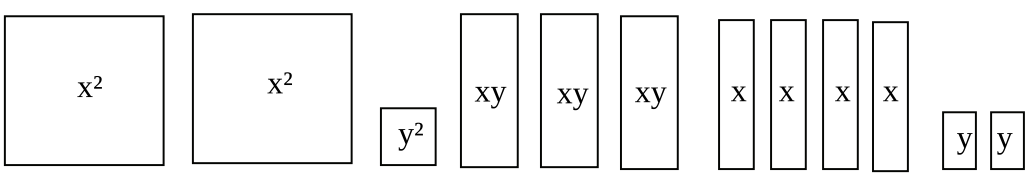
## 3.4 A divisão de polinômios

No caso da divisão há restrições adicionais que devem ser consideradas para se trabalhar com as algeplacas, o que ocorre, em geral, com qualquer material didático. O professor deverá selecionar cuidadosamente os polinômios que serão envolvidos na divisão, para que a mesma possa ser representada com o material concreto. Os polinômios escolhidos devem possibilitar uma divisão exata e as demais situações decorrerão, como na observação feita anteriormente, das generalizações que o aluno fizer a partir da manipulação das algeplacas nos exemplos dados e da reflexão acerca de suas ações com o material.

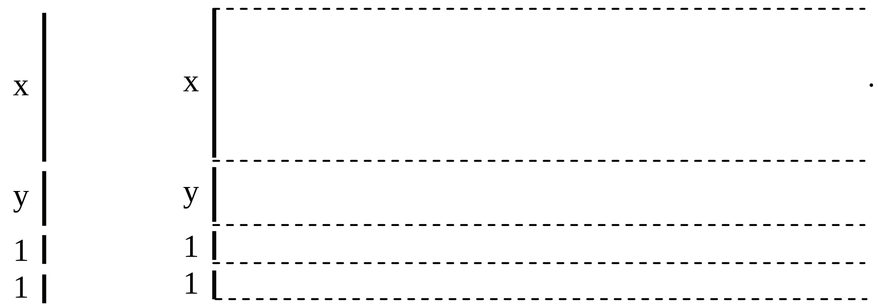
Observe o primeiro exemplo: $(2x^2+y^2+3xy+4x+2y) : (x+y+2)$.

O aluno deverá inicialmente separar as peças que correspondem ao primeiro polinômio, isto é, as duas placas de $x^2$; uma placa de $y^2$; três placas de xy; quatro placas de x e duas de y; nesta ordem, na ilustração abaixo. O desafio é organizar as peças em um retângulo, de modo que um de seus lados seja igual a (x+y+2), respeitando-se os limites das peças, como indicado pelas linhas tracejadas nos exemplos da multiplicação. O resultado da divisão será dado pela expressão correspondente ao segundo lado do retângulo.

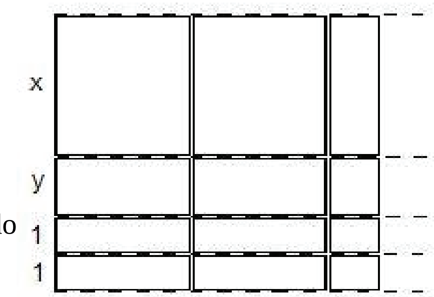
As algeplacas que representam os elementos do primeiro polinômio são as indicadas abaixo, na mesma sequência apresentada na expressão, separadas do conjunto de algeplacas.



Para identificar o resultado da divisão, deve-se dispor as algeplacas acima na forma de um retângulo, de modo que um de seus lados seja igual ao polinômio divisor, isto é, a (x+y+2), como indicado no conjunto de linhas verticais abaixo, à esquerda. Em seguida traçamos linhas paralelas, seguindo os limites das peças, de modo que as algeplacas que constituem o primeiro polinômio (indicadas na figura acima) sejam organizadas entre elas, formando um retângulo




Após algumas tentativas, os alunos encontrarão como disposição correta a que segue ao lado.




É fácil ver que o outro lado do retângulo será dado por 2x + y, resultado da divisão.

OBSERVAÇÃO: para não correr o risco de trabalhar com a divisão de polinômios que não podem ser representados concretamente, o professor pode criar dois polinômios envolvendo apenas variáveis de grau 1 (elevadas à primeira potência) e termos positivos e multiplicar os dois. O resultado da multiplicação será o polinômio a ser dividido e qualquer um dos dois polinômios pode ser o divisor, sendo o outro o resultado que os alunos procurarão.

Por exemplo, fazendo (x+y+2) . (2x+3), segue ($2x^2$+ 2xy+7x+3y+6). Este último será o polinômio a ser didivido e um dos dois primeiros pode ser escolhido como divisor. Se escolhermos como divisor (x+y+2), o resultado da divisão será (2x+3). Se escolhemos (2x+3) como divisor, (x+y+2) será o resultado da divisão. Em ambos os casos o procedimento para determinar o lado desconhecido do retângulo é o mesmo.

Realizar várias divisões utilizando as algeplacas, com os cuidados já recomendados, e posteriormente fazer a divisão dos polinômios de modo convencional, para que o aluno verifique que o resultado final obtido é o mesmo. Depois solicitar que as divisões sejam feitas sem o uso do material concreto (refazer as que foram feitas apenas com o auxílio das placas e outras que o professor desejar).

Depois de processadas as generalizações pertinentes acerca dos procedimentos de manipulação nessa operação, efetuar a divisão de outros polinômios, agora sem a preocupação de sua representação concreta, inclusive contendo termos negativos ou  potências distintas da unidade nos polinômios divisores.

## 3.5 Resolvendo equações algébricas

Para o trabalho com sistemas de equações, podemos propor situações que envolvam a noção de equilíbrio entre dois elementos de um sistema como, por exemplo, na resolução prática de questões envolvendo balanças de dois pratos, como as apresentadas em seguida.

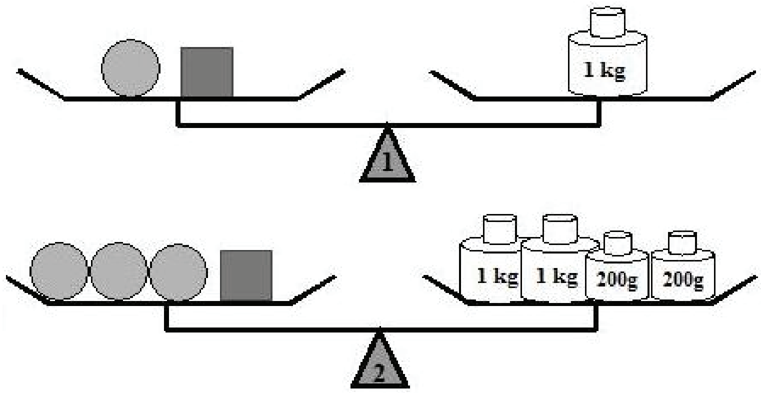
Considere que as figuras exibidas em cada situação representam uma balança de dois pratos em equilíbrio, ou seja, a massa total de todos os elementos que estão em um prato equivalem à massa total de todos os elementos que se encontram no segundo prato. O desafio é descobrir o que se pede, inicialmente sem apelar para a linguagem algébrica, mas apenas indicando o procedimento prático adotado para resolver o problema, considerando que se uma massa é retirada do primeiro prato, uma massa equivalente a ela precisa ser retirada do segundo prato, para que a balança permaneça em equilíbrio.

É interessante observar que as atuais gerações de aluno têm pouco ou nenhum convívio com esse tipo de balança, pelo menos os que vivem nos grandes centros urbanos, nos quais são adotadas quase que tão somente balanças digitais. Assim, para que o aluno se familiarize com o funcionamento de balanças como essas, o professor pode improvisar um sistema bastante simples e prático, usando apenas um cabide de roupa e dois sacos plásticos iguais, amarrados nas extremidades do cabide.

Basta pendurar o cabide pelo gancho em um barbante, ou mesmo no dedo, e realizar ações que permitam ao aluno compreender a permanência ou mudança de equilíbrio, de acordo com o que é feito em uma ou nas duas sacolas. Por exemplo, colocando a mesma quantidade de laranjas do mesmo tamanho nas duas sacolas, o cabide fica equilibrado. Para manter o cabide equilibrado, basta retirar a mesma quantidade de laranjas de cada sacola. Os objetos e as relações de peso entre eles pode variar (colocando frutas que tenham massa na relação dois para um como, por exemplo, cada laranja com massa igual à de dois tomates) levando o aluno a levantar hipóteses e tirar conclusões sobre as ações que realiza.

Na resolução dos problemas propostos, a balança concreta é dispensada e o aluno é estimulado a pensar sobre as ações que realizaria para descobrir a massa das frutas, considerando os pesos que as acompanham nos pratos das balanças.

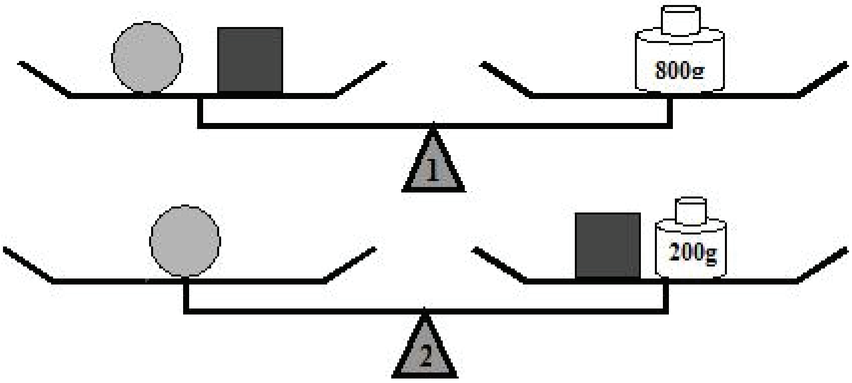
**Problema desafio 1**: tentar descobrir qual a massa do "círculo" e qual a do "quadrado", observando as balanças (de dois pratos) 1 e 2, abaixo, ambas em equilíbrio (obs.: considere, no problema, que todos os "círculos" têm a mesma massa, assim como todos os "quadrados").




Anotar cada passo de seu método de resolução (na linguagem usual). Passar a informação dada na balança 1 para a linguagem matemática (através de uma equação). Fazer o mesmo para a balança 2. Estimular a discussão das ações práticas que seriam realizadas em cada passo, traçando um paralelo com a resolução algébrica do sistema.

Repetir o procedimento adotado no item 1, considerando agora as equações dos problemas desafio 2 e 3, observando as semelhanças e diferenças nas ações realizadas em cada passo, nos três casos.

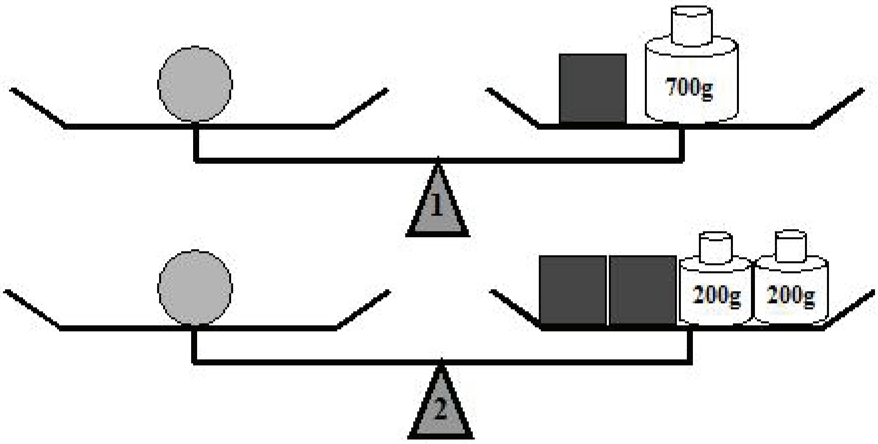
**Problema desafio 2:** tentar descobrir qual a massa do "círculo" e qual a do "quadrado", observando as balanças (de dois pratos) 1 e 2, abaixo, ambas em equilíbrio (obs.: considere, no problema, que todos os "círculos" têm a mesma massa, assim como todos os "quadrados").




1- Passar a informação dada na balança 1 para a linguagem matemática (através de uma equação).
2- Fazer o mesmo para a balança 2.
3- Repetir o procedimento adotado no problema desafio 1, considerando agora as equações dos itens 1 e 2, acima.
4- Tentar resolver o problema através de um procedimento diferente do usado na questão anterior.

Pergunta-se: nós poderíamos colocar todas as informações das duas balanças em apenas uma única balança? de que maneira? Como faríamos para descobrir, então, as massas de cada figura?

**Problema desafio 3** - tentar descobrir qual a massa do "círculo" e qual a do "quadrado", observando as balanças (de dois pratos) 1 e 2, abaixo, ambas em equilíbrio (obs.: considere, no problema, que todos os "círculos" têm a mesma massa, assim como todos os "quadrados").




1- Tentar resolver o problema 3 de modo diferente dos utilizados nos problemas 1 e 2, descrevendo-o na linguagem usual.
2- Passar a informação dada na balança 1 para a linguagem matemática (através de uma equação).
3- Fazer o mesmo para a balança 2.
4- Repetir o procedimento adotado nos problemas anteriores.

DICA: no sítio http://schooltimegames.com/Mathematics/MP_Seesaw.html são propostos desafios com balanças - quebra-cabeças simples - que podem facilitar a compreensão do aluno em relação à noção de equilíbrio (ou a falta de) em balanças de dois pratos.

## 4. Avaliando o que foi construído

1) Elabore um Relatório, descrevendo o procedimento prático adotado em cada caso proposto, envolvendo balanças, e sua relação direta com o processo de resolução de um sistema de equações (se realizou uma junção de elementos em pratos da balança; se realizou uma substituição de um elemento por outro na balança, etc, explicando a ação algébrica correspondente).

2) Proponha alguns problemas semelhantes e traduza as informações neles presentes para a linguagem algébrica, resolvendo-os.

## 5.Referências

SHULTE, Albert (org.). *As idéias*[4] *da álgebra*. São Paulo: Atual, 1995.

RÊGO, Rogéria; RÊGO Rômulo. Matematicativa. João Pessoa, PB: EdufPb, 2002. 3a. Ed.

[4] A grafia foi mantida de acordo com o original, por se tratar de livro escrito antes da atual Reforma Ortográfica.

**Unidade III** **As relações entre Álgebra e Geometria**

## 1. Situando a temática

Nesta unidade iremos discutir possíveis relações entre a Geometria e os demais ramos de conhecimento da Matemática, em especial a Álgebra, discutindo a origem do pensamento geométrico, o ensino de Geometria no Brasil e apresentando sugestões de atividades que poderão ser realizadas pelo professor em sala de aula, no estudo do “Espaço e Forma”.

## 2. Problematizando a Temática

Em que consiste o pensamento geométrico e qual sua relação com o pensamento algébrico? Para entendermos esta relação, precisamos remontar à Antiguidade, buscando respostas na forma como os gregos elaboravam seu conhecimento. Entendê-la poderá nos ajudar a compreender as articulações metodológicas que podemos fazer entre Geometria e Álgebra, objetivando melhorar o processo de ensino-aprendizagem de ambos.

Na unidade anterior, por exemplo, apresentamos como sugestão para o trabalho com as operações com polinômios, o uso de um material denominado de algeplacas, que envolve em suas peças o conceito de área de retângulos e quadrados, visando a atribuição de significado a essas operações, pelo aluno.

## 3. Conhecendo a Temática

### 3.1 A origem geométrica do pensamento algébrico

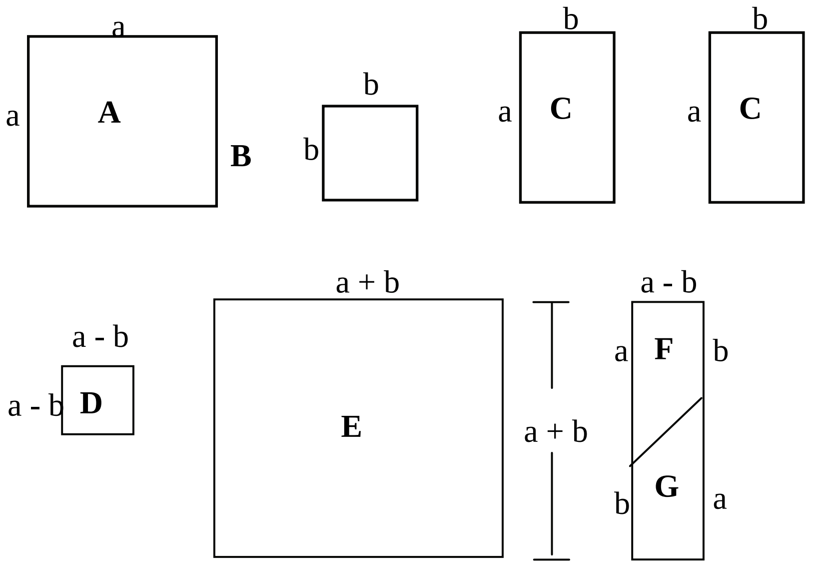
O pensamento matemático grego, na antiguidade, era predominantemente baseado nas formas geométricas. Os gregos admiravam a Geometria não apenas em razão de sua aplicabilidade, mas procuraram elaborar deduções formais das leis que guiavam tais aplicações práticas. Filósofos gregos como Pitágoras e Platão, atribuíam grande importância à Geometria, em razão da aproximação que enxergavam entre ela, a religião e a metafísica.

Para resolver problemas práticos, os gregos lançavam mão tanto da Álgebra quanto da Geometria, de uma forma que passou a ser denominada de Álgebra Geométrica Grega. Sua origem é marcada pelos trabalhos de Euclides e resultou da necessidade de representação algébrica de elementos geométricos. Por exemplo, os lados de um quadrado eram representados por um número $x$, e a obtenção de um quadrado a partir dos seus lados era representada pelo produto dos lados $x.x = x^2$. Do mesmo modo, um prisma de arestas iguais a x era representado pelo produto $x.x.x = x^3$.

O produto notável $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ já era estabelecido em termos geométricos pelos gregos, ainda no século III a.C., e estava presente na obra Os *Elementos*, de Euclides. Para eles, $(a + b)^2$ representava um retângulo de lados $(a + b)$; $a^2$ representava um quadrado de lados iguais a $a$, e $ab$ representava um retângulo de lados $a$ e $b$.

ATIVIDADE: para facilitar a compreensão da forma como os gregos estabeleciam a relação entre a Álgebra e a Geometria, vamos construir um modelo concreto para os produtos notáveis, cortando em cartolina, madeira ou borracha as peças indicadas na ilustração, tomando os valores de $a$ e $b$ como desejar. De preferência, evitar valores inteiros para $a$ e $b$, além de evitar tomar um valor como múltiplo do outro, o que poderia induzir os alunos a realizarem generalizações equivocadas.

OBSERVAÇÃO: Embora este material não seja adequado para o aluno que está iniciando seus estudos em Álgebra, ele poderá ser utilizado em sala de aula, nas séries finais do Ensino Fundamental, quando for trabalhado o conteúdo relativo aos produtos notáveis.




Depois de prontas as peças, tente responder aos seguintes questionamentos:

1) Utilizando as peças A, B e C, construir um quadrado e verificar qual a relação de sua área com a área da peça E.

Vale a relação $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ?

2) Existe algum modo de arranjar as peças A, B e C, de maneira que a figura D possa ser relacionada com alguma parte da figura obtida?

Vale a relação $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ?

3) Existe alguma relação entre as peças FG e as peças A e B ? Vale a igualdade:

$(a + b) . (a - b) = a^2 - b^2$ ?

REGISTRO DA ATIVIDADE: escreva um relatório com as observações feitas ao resolver as questões propostas.

## Ampliando seu Conhecimento

CURIOSIDADE: Geometria é uma palavra de origem grega, resultante da união de GEO (terra) e METRIA (medida), e se refere à origem desse ramo de conhecimento, que os indícios históricos apontam residir na necessidade prática dos agrimensores do antigo Egito. Conhecidos como “esticadores de corda”, utilizavam esta estratégia para medir a região ocupada pelas porções de terra férteis situadas à margem do Rio Nilo.

## 3.2 O ensino de Geometria no Brasil

Até o ano de 1930, quando foi implementada no país a Reforma Francisco Campos, não existia a disciplina Matemática nos currículos brasileiros. Os conteúdos de Aritmética, Álgebra, Geometria e Trigonometria eram estudados separadamente e os concursos para professor eram dirigidos a uma das áreas específicas. A junção, proposta na Reforma, atendia à concepção de que esses campos de conhecimento se complementavam e, portanto, deveriam constituir uma única disciplina escolar. Além disso, a disciplina de Matemática passava a ser obrigatória em todas as séries da Educação Básica e tanto esta obrigatoriedade quanto a unificação dos diferentes ramos da Matemática permanecem até os dias de hoje.

No início da década de 1960, uma nova reforma, baseada no Movimento da Matemática Moderna – MMM (que se deu não apenas no Brasil, mas em vários países, a exemplo dos Estados Unidos, França e Portugal), provocaria mudanças radicais no ensino desta disciplina. Apesar de não ter sido implantada por decreto, foi amplamente adotada em todo o território nacional e tinha como uma de suas características centrais a ênfase na linguagem e conceitos da Teoria dos Conjuntos.

De acordo com Pavanello (1993), o ensino de Geometria foi sendo abandonado a partir da implantação do MMM, em razão do novo enfoque sugerido para seu ensino. Os professores, que apresentavam dificuldades para fazê-lo na perspectiva tradicional, enfrentaram percalços ainda maiores quando a orientação era que a Geometria fosse ensinada segundo a dimensão das transformações (com base nos conceitos de isometrias) e, a partir de então, nem uma nem outra forma de ensino deste conteúdo se concretizava em sala de aula. A ênfase dada aos aspectos algébricos da Matemática nas décadas de 1960 e 1970, com o MMM, provocou o abandono, em nossos programas escolares, do campo geométrico, reconhecido hoje como de inquestionável importância para a formação de nossos alunos, quer consideremos os aspectos didáticos, históricos ou científicos.

Segundo Ozámiz (1995), "o que foi bom para a fundamentação foi considerado, por muitos, bom também para a transmissão de conhecimentos. As consequências para o ensino da Matemática, em geral, foram ruins, mas foram especialmente nefastas para o pensamento geométrico". No entanto, a "necessidade de uma volta do espírito geométrico ao ensino de Matemática é algo que todo o mundo parece estar de acordo" (idem), embora não haja consenso quanto a propostas eficientes voltadas para o ensino de Geometria, tanto em sala de aula quanto nos cursos de formação inicial e continuada de professores.

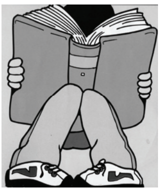
Ao fazer uma retrospectiva das principais características que marcaram o ensino de Geometria nas últimas décadas, Célia Carolino Pires, Edda Cury e Tânia Campos (PIRES, CURI, CAMPOS, 2000, p. 15) destacam três momentos: 1) a década compreendida entre os anos de 1955 a 1965; 2) o período entre os anos de 1966 e 1975 e 3) os anos que se seguiram, de 1976 até hoje (idem, pp. 20, 21). O primeiro deles ficou caracterizado pela centralização na aprendizagem de nomenclaturas relacionadas a linhas e figuras, e no cálculo de perímetros, áreas e volumes através da aplicação mecânica de fórmulas. Não eram enfatizadas as relações entre os elementos geométricos, embora o trabalho com instrumentos de desenho fosse razoável.

O período seguinte foi influenciado diretamente pela Matemática Moderna, sendo os elementos geométricos tratados dentro da linguagem da Teoria dos Conjuntos. Os problemas de aplicação e as atividades práticas eram pouco explorados e apenas na década de 1970 começaram a surgir projetos baseados nas experiências dos alunos, envolvendo o trabalho com figuras planas e espaciais e ações segundo uma perspectiva mais dinâmica, a partir de composições, decomposições, reduções, ampliações e estudo de simetrias. A partir da segunda metade da década de 1970, "(a) necessidade de resgatar o ensino de Geometria nas escolas passou a ser um dos destaques em diferentes propostas curriculares e artigos sobre o assunto. Chama-se atenção para a importância do desenvolvimento de um pensamento geométrico, de tanta relevância para o aluno como o pensamento aritmético ou algébrico". (ibidem, p. 21).

Diversas experiências começaram a ser divulgadas a partir de então, muitas delas baseadas nos modelos de Van Hiele (LINDIQUIST e SHULTE, 1995) e no uso de materiais manipulativos em sala de aula, todas com o objetivo comum de resgatar o ensino de Geometria. Esta passou a ser compreendida como um campo que permite a elaboração de atividades que possibilitam não apenas o desenvolvimento de um raciocínio matemático particular, de habilidades e atitudes específicas, mas também a capacidade de resolver problemas que envolvem a discriminação de formas e a manipulação destas, do senso estético e da criatividade.

Para Marília e Mauro Toledo (TOLEDO e TOLEDO, 1997, p.221), a maioria dos currículos escolares não deu, durante muito tempo, a devida importância ao fato de que antes mesmo de dominar a linguagem, a criança explorará e construirá interpretações pessoais do espaço que a rodeia e das formas nele presentes, uma vez que as primeiras propriedades que observará e compreenderá serão aquelas de natureza topológica, isto é, ligadas à sua localização, e de objetos em geral, no espaço.

## Dialogando e Construindo Conhecimento



DICA: para saber mais sobre as pesquisas realizadas acerca da relação entre o MMM e o ensino de Geometria no Brasil, leia o artigo: *ABAIXO EUCLIDES E ACIMA QUEM? Uma análise do ensino de Geometria nas teses e dissertações sobre o Movimento da Matemática Moderna no Brasil*, de autoria de Aparecida Rodrigues Silva Duarte e Maria Célia Leme da Silva (texto completo no site http://www.uepg.br/praxiseducativa/v1n1Artigo_8.pdf)

## 3.3 A Geometria na formação do aluno

É a partir da exploração de elementos ligados à realidade do aluno que as primeiras noções relativas ao conhecimento geométrico podem ser trabalhadas, incorporando-se sua experiência pessoal com os elementos do espaço e sua familiarização com as formas bi e tridimensionais, interligando-as aos conhecimentos numéricos, métricos e algébricos que foram ou serão por ele construídos.

Para Pires (PIRES, 2000, p. 29), “o espaço se apresenta para a criança de forma essencialmente prática: ela constrói suas primeiras noções espaciais por meio dos sentidos e dos movimentos”. É esse espaço perceptivo que possibilitará a posterior construção de um espaço representativo, cujos elementos não fazem parte do espaço real, podendo ser concebidos apenas de modo ideal, dentro de uma linguagem formalizada.

> Apesar de, para os matemáticos, não haver dúvidas de que os elementos geométricos (ponto, reta, plano, sólidos, etc.) pertencem ao mundo das idéias[5] matemáticas, estes elementos tiveram sua origem no mundo físico e representam abstrações de objetos materiais. Esta ambigüidade[6] é um fator perturbador para o ensino da Geometria, pois ela se apresenta como uma grande dificuldade para os alunos, que não percebem que os objetos geométricos são abstratos e que mesmo ao observarem o desenho de uma figura geométrica no livro-texto ou no quadro-negro, ou mesmo sua imagem na tela do computador, estão, na realidade, vendo apenas uma representação do objeto geométrico. Embora a maioria das representações de objetos geométricos seja perceptível visualmente, é importante não se confundir a habilidade de visualização, isto é, a habilidade de se perceber o objeto geométrico em sua totalidade, com a percepção visual das representações disponíveis deste objeto. (KALLEF, 1998, p. 16).

A construção do espaço representativo não se verifica espontaneamente e será efetivada apenas se forem desenvolvidas ações especificamente voltadas para tal, ao longo de todo o processo de formação do aluno. É a partir das experiências pessoais com a forma, cor, textura, dimensões e a manipulação de um objeto físico que as imagens mentais do mesmo serão construídas, permitindo sua visualização ainda que na ausência deste, assim como sua representação através de modelos concretos ou desenhos (KALEFF, 1998, p.16). A manipulação de modelos concretos e de objetos que fazem parte do dia a dia do aluno auxiliará o processo de construção dos modelos mentais dos diversos elementos geométricos, através da identificação e generalização de propriedades e do reconhecimento de padrões, em uma estrutura formal.

---

5 A grafia foi mantida de acordo com o original, por se tratar de citação extraída de livro escrito antes da atual Reforma Ortográfica.

6 Idem.

É, deste modo, “importante que se leve o aluno a vivenciar experiências com diversos tipos de materiais concretos manipulativos, a fim de que ele possa ter a oportunidade de encontrar o meio material que seja mais apropriado à sua percepção sensorial e que mais aguce a sua curiosidade”. (idem, p. 17).

Nos sistemas de avaliação da Educação Básica (SAEB, Prova Brasil, etc), o Ministério da Educação faz uso da MATRIZ DE REFERÊNCIA DE MATEMÁTICA DO SAEB: TEMAS E DESCRITORES, e para o Ensino Fundamental, relativos ao campo “Espaço e Forma”, os descritores são:

**5º ano do EF**

D1 – Identificar a localização/movimentação de objeto em mapas, croquis e outras representações gráficas.

D2 – Identificar propriedades comuns e diferenças entre poliedros e corpos redondos, relacionando figuras tridimensionais com suas planificações.

D3 – Identificar propriedades comuns e diferenças entre figuras bidimensionais pelo número de lados, pelos tipos de ângulos.

D4 – Identificar quadriláteros observando as posições relativas entre seus lados (paralelos, concorrentes, perpendiculares).

D5 – Reconhecer a conservação ou modificação de medidas dos lados, do perímetro, da área em ampliação e/ou redução de figuras poligonais usando malhas quadriculadas.

**9º ano do EF**

D1 – Identificar a localização/movimentação de objeto em mapas, croquis e outras representações gráficas.

D2 – Identificar propriedades comuns e diferenças entre figuras bidimensionais e tridimensionais, relacionando-as com as suas planificações.

D3 – Identificar propriedades de triângulos pela comparação de medidas de lados e ângulos.

D4 – Identificar relação entre quadriláteros por meio de suas propriedades.

D5 – Reconhecer a conservação ou modificação de medidas dos lados, do perímetro, da área em ampliação e/ou redução de figuras poligonais usando malhas quadriculadas.

D6 – Reconhecer ângulos como mudança de direção ou giros, identificando ângulos retos e não-retos.

D7 – Reconhecer que as imagens de uma figura construída por uma transformação homotética são semelhantes, identificando propriedades e/ou medidas que se modificam ou não se alteram.

D8 – Resolver problema utilizando propriedades dos polígonos (soma de seus ângulos internos, número de diagonais, cálculo da medida de cada ângulo interno nos polígonos regulares).

D9 – Interpretar informações apresentadas por meio de coordenadas cartesianas.

D10 – Utilizar relações métricas do triângulo retângulo para resolver problemas significativos.

D11 – Reconhecer círculo/circunferência, seus elementos e algumas de suas relações.

Visando contemplar tais perspectivas, além de outras que consideramos igualmente importantes, no final da Unidade apresentaremos algumas sugestões de atividades, que poderão servir de modelo para o professor. Também iremos dispor de textos complementares na página, os quais esperamos que sejam proveitosos para a organização de um banco de textos e atividades, dos quais se poderá lançar mão no desenvolvimento da prática.

## 4. Avaliando o que foi construído

Resolva os itens que se encontram no texto da plataforma, compostos de questões propostas para alunos do 5º ano do EF, em avaliações do SAEB, e identifique o(s) descritor(es) com o(s) qual(is) cada questão poderia ser associada (dados na relação apresentada anteriormente), justificando sua resposta.

## 5. Referências


KALEFF, Ana Maria. *Vendo e entendendo poliedros.* Rio de Janeiro: EduFF, 1998.

LINDQUIST, Mary L. e SHULTE, Albert P. *Aprendendo e Ensinando Geometria.* São Paulo: Atual, 1994.

OZÁMIZ, Miguel de Guzman. *Tendências innovadoras en educacion matematica.* http://www.oei.es/edumat.htm (junho, 2005).

PAVANELLO, M.R. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e conseqüências[7]. Revista Zetetiké, ano 1, nº 1, pp. 07-17 In: Unicamp, Faculdade de Educação, SP: 1993.

PIRES, Célia Carolino, CURY, Edda, CAMPOS, Tânia Maria M. *Espaço e forma: a construção de noções geométricas..*. São Paulo: PROEM, 2000.

RÊGO, Rogéria G., RÊGO, Rômulo M., GAUDENCIO JÚNIOR, Severino. *A geometria do origami.* João Pessoa, PB: EdUFPB, 2003.

TOLEDO, Marília, TOLEDO, Mauro. *Como dois e dois.* São Paulo: FTD, 1997.

*Vivendo a Matemática.* Diversos Autores. Vol. 1 a 13. São Paulo: Scipione, 1990.


[7] A grafia foi mantida de acordo com o original, por se tratar de livro escrito antes da atual Reforma Ortográfica.

## Unidade IV A construção do pensamento geométrico

### 1. Situando a Temática

Na unidade anterior discutimos sobre a natureza do pensamento algébrico e o desenvolvimento no ensino de Geometria no Brasil, encerrando a Unidade com a apresentação dos descritores que são utilizados no campo do Espaço e Forma, em uma matriz referencial proposta pelo MEC. Nesta unidade, trazemos sugestões de atividades que têm como objetivo destacar a importância da linguagem e explorar objetos do cotidiano ou construídos pelos alunos, segundo seus elementos, propriedades e relações entre eles. Partindo-se inicialmente de uma apreensão de conhecimento por meio de características concretas desses objetos, busca-se avançar na direção de conceitos cada vez mais abstratos e formais da Geometria.

### 2. Problematizando a Temática

Quais os cuidados que o professor precisa ter com a linguagem utilizada em sala de aula, considerando que termos que usamos no cotidiano têm um significado muito particular na Matemática? Como, ao mesmo tempo, enriquecer a compreensão das duas aplicações de uma palavra ou expressão (no dia-a-dia e na sala de aula), explorando uma possível relação existente entre ambas?

### 3. Conhecendo a Temática

#### 3.1 A importância da linguagem no ensino de Geometria

Em razão da ambiguidade da linguagem cotidiana, conseguimos transmitir sentimentos e ideias que não podem ser expressos com exatidão, inclusive a de fazermos descrições aproximadas de situações impossíveis de serem repetidas. Além disso, uma mesma palavra pode ter diversos significados. Por exemplo, “manga” pode corresponder à fruta; a uma flexão do verbo mangar (gozar de alguém); a uma parte do nosso vestuário, e para sabermos qual significado está sendo utilizado dependemos do contexto. Além disso, de acordo com a inflexão de voz que usamos para uma mesma palavra ela pode expressar humor, ironia, sarcasmo ou mesmo raiva.

Graças às convenções explícitas ou implícitas da nossa comunicação por palavras, podemos inclusive ser breves e entendidos, pelo menos dentro das nossas necessidades de comunicação mais simples. A linguagem comum necessita das diferentes maneiras possíveis segundo as quais podemos nos expressar quando falamos, pois ela está carregada de sentidos diferentes, sejam temporais, de desejos, de emoções, de sutilezas, sendo formada de expressões compreensíveis apenas por um círculo muito reduzido de pessoas que têm características comuns.

Na comunicação matemática, entretanto, há a necessidade de uma comunicação clara, que em todas as circunstâncias signifiquem o mesmo e possuam entre si ligações lógicas precisas. Na linguagem matemática o tempo não conta e as diferenças de desejo, valores e intencionalidade, estão ausentes.

A linguagem matemática informal que utilizamos normalmente nas salas de aulas e nos livros textos, constitui uma depuração (e, ao mesmo tempo, um empobrecimento) da linguagem do dia-a-dia e compartilha com ela muitos dos vocábulos e expressões cotidianas. Embora a comunicação na Matemática ocorra com as mesmas expressões da linguagem ordinária, a necessidade de que ela seja mais exata, coerente e logicamente consistente, implica um sentido técnico que, em certos casos, não corresponde à forma com a qual nos comunicamos no dia a dia. Para quem leciona Matemática é importante estar atento a estas mudanças de sentido que podem tornar os primeiros passos um caminho complexo para o aluno.

Um outro aspecto a considerar é que quando procuramos apreender o significado de uma palavra sem compreender os elementos que a compõem, estamos entregando unicamente à memória uma tarefa que deveria ser compartilhada pelo raciocínio.

A maior parte das palavras de nosso idioma, cerca de 95% delas, são formadas a partir de radicais de origem grega ou latina e, na Geometria, termos com essas origens predominam. Ao trabalharmos com a análise da formação das palavras na Geometria estamos auxiliando o aluno a refletir sobre seu significado e a compreender melhor alguns conceitos, enriquecendo seu vocabulário e permitindo-lhe relacionar as ideias matemáticas entre si e a Matemática com outras disciplinas.

A introdução de novos conceitos em sala de aula deve ser feita através de atividades que contemplem as distintas fases de desenvolvimento dos mesmos, quer seja sua apresentação informal (através de material concreto, problemas ou jogos); seu reconhecimento; sua construção ou análise. As atividades aqui sugeridas visam o desenvolvimento dessas fases no que se refere à análise da origem das palavras na Geometria.

As ideias presentes neste Item compreendem uma adaptação livre do texto *Word Roots in Geometry*, de Margaret E. McIntosh, da Universidade de Nevada, Estados Unidos, publicado na revista *The Mathematics Teacher*, vol. 87, n$^{0}$ 7, de outubro de 1994, editada pela NCTM (diversas outras atividades, igualmente interessantes, poderão ser encontradas em outros exemplares).

A aplicação em sala de aula das atividades sugeridas, e aqui adaptadas, são de grande valor pedagógico, permitindo ao aluno uma melhor compreensão não só de inúmeros conceitos da Geometria mas também de conceitos de outras disciplinas, uma vez que seu vocabulário é ampliado através não apenas da memorização mas principalmente do raciocínio.

OBSERVAÇÃO: os termos apresentados nas tabelas das atividades são apenas sugestões. O professor pode, a seu critério, excluir alguns e/ou incluir novos termos. É importante que o professor programe de modo cuidadoso a sequência de atividades, de acordo com o conteúdo que pretende desenvolver, preparando com antecedência todo o material a ser utilizado, o que pode, em alguns casos, ser feito com a ajuda dos alunos.

ATIVIDADE 1 - Distribuir objetos e gravuras ou cartazes diversos na sala de aula. Os alunos são convidados a procurar, em uma caixa com as palavras sugeridas na tabela 1, abaixo, termos que possam associar a algum objeto ou figura da sala (não precisa haver, necessariamente, uma correspondência 1 a 1 entre objetos e palavras) durante cerca de 15 minutos, preferencialmente em grupos de dois ou três. Decorrido o tempo estabelecido levantar, com os alunos, questões do tipo:

1) Como fizeram para relacionar os nomes com as figuras ou objetos?

2) Havia na caixa algum termo cuja representação ou significado desconhecessem?

3) Havia na caixa algum termo conhecido que não possuía uma representação no material disponível na sala?

4) Dentre os cartões selecionados algum deles poderia ser relacionado de alguma forma a um número? Se sim, quais? Será que podemos encontrar outros termos na caixa que satisfaçam essa condição?

Tabela 1.

A tabela 1 poderá, por exemplo, conter os seguintes termos: adjacente; agudo; altitude; ângulo; arco; cilindro; círculo; circunferência; cone; congruente; convexo; corda; cubo; decágono; diagonal; diâmetro; dodecaedro; dodecágono; escaleno; esfera; hemisfério; heptágono; hexágono; interseção; isósceles; losango; obtuso; octaedro; octógono; paralelo; paralelogramo; pentágono; pirâmide; plano; poliedro; polígono; ponto; prisma; quadrado; quadrilátero; raio; reta; retângulo; secante; segmento; semicírculo; trapézio; undecágono (o professor poderá acrescentar ou subtrair os termos que julgar necessários).

ATIVIDADE 2 - Em folhas de cartolina ou no quadro-negro, escrever os números de 1 a 10 e, abaixo de cada número, as palavras indicadas pelos alunos após a última questão sugerida na Atividade 1. Utilizando dicionários e trabalhando em grupos, os alunos procuram outras palavras, não necessariamente apenas da Matemática, que possam ser relacionadas aos números dados (ver exemplos na tabela 2, abaixo).

Tabela 2 (Exemplos de palavras que podem ser relacionadas aos números de 1 a 10)

1- Unilateral, uníssono, unicórnio, ...

2- Bicicleta, bilateral, bilíngue, bimestre,...

3- Triângulo, triciclo, trimestre, terceiro, tricampeão, trissílaba, ...

4- Quadrúpede, quarto, quadrilátero, quadrado, tetracampeão, tetraedro,....

5- Quíntuplo, quinteto, quinto, pentacampeão, pentágono, pentatlo, ...

6- Hexágono, hexacampeão, sêxtuplo, semestre, sexto, ...

7- Heptágono, sétimo, setembro, sétimo, ...

8- Outubro, octógono, octaedro, oitavo, ...

9- Novena, novembro, nonagésimo, nono, ...

10- Decágono, década, décimo, dezembro, decímetro, decâmetro, ...

Estabelecer um intervalo de tempo de trabalho e depois de decorrido esse tempo, sugerir aos alunos que verifiquem se existe alguma relação especial entre as palavras vinculadas a cada número, promovendo discussões com a turma. Algumas curiosidades como, por exemplo, o fato das palavras setembro, outubro, novembro e dezembro estarem relacionadas, respectivamente, aos números sete, oito, nove e dez, estimulam a turma a obter mais informações. Tais informações podem ser encontradas em textos que tratem da construção e história dos calendários e sistemas de medida de tempo.

ATIVIDADE 3 - Em grupos de três, os alunos recebem um conjunto de novos cartões com radicais de origem grega e latina, um em cada cartão com o respectivo significado, como os sugeridos na tabela 3 (que pode ser ampliada, a critério do professor). Consultando ou não um dicionário, devem procurar escrever tantas palavras conseguirem relacionadas aos radicais dados como, por exemplo, o cartão SEMI - metade, pode ser relacionado às seguintes palavras: semirreta, semideus, seminu, semivogal, etc, destacando entre as palavras por eles escritas, quais as que estão relacionadas com a Geometria.

Tabela 3 - *Radical* x significado.

*Deca* – dez; *Dia* – através; *Dodeca* – doze; *Edro* – face; *Equi* – igual; *Gono* – ângulo; *Hemi* – metade; *Hepta* – sete; *Hexa* – seis; *Hiper* – sobre; *Hipo* – sob; *Inter* – entre; *Iso* – igual; *Látero* – lado; *Metro* – medida; *Míria* - dez mil; *Nona* – nove; *Octo* – oito; *Orto* – reto; *Para* - lado a lado; *Penta* – cinco; *Poli* – muitos; *Quadri* - com quatro; *Quili* – mil; *Seca* – corta; *Semi* – metade; *Trans* - através de, além de.

ATIVIDADE 4 - Dividir os alunos em grupos de 5. Cada grupo recebe uma folha de papel em branco e lápis. O professor coloca um termo geométrico no quadro-negro e a tarefa de cada grupo será identificar o(s) radical (ais) presente(s) na palavra dada e seu(s) significado(s). Cada grupo ganha um ponto por resposta correta (opcional).

Exemplo: PENTÁGONO: penta - cinco (1 ponto) e gono - ângulo (mais 1 ponto). Pode-se ainda dar um ponto extra à equipe que souber fazer a representação do termo (desenho, ilustração), quando possível.

ATIVIDADE 5 - Dividir a turma em grupos de dois alunos. Os alunos devem agora produzir eles mesmos novos termos usando os radicais da atividade anterior (tabela 3), preenchendo a seguinte folha de dados:

1) Radical usado e seu significado (pode usar mais de um);

2) Palavra formada;

3) Criar uma definição para a palavra formada;

4) Verificar, em um dicionário, se a palavra já existe ou não ou, caso a palavra já exista, se seu significado foi modificado;

5) Fazer uma ilustração, caso seja possível.

OBSERVAÇÃO: os alunos podem combinar apenas os radicais dos cartões entre si ou combinar os radicais dos cartões com outras palavras que queira. É importante discutir com eles acerca das palavras e dos significados apresentados bem como sobre a validade ou não da utilização de novos termos criados, sua divulgação e aceitação pela comunidade, como no caso das gírias ou de termos usados para nomear novas espécies de animais ou plantas.

ATIVIDADE 6 - Fixar na sala cartazes com várias palavras (sugestões na tabela 4) e os alunos, individualmente ou em grupos, devem escolher uma das palavras e realizar com ela as seguintes atividades: a) Escrever a palavra no centro de uma folha de papel e dividí-la nos radicais que a formam; b) Expandir a palavra, associando seus radicais a outras palavras que estejam relacionadas com os mesmos (exemplo abaixo).

**QUADRILÁTERO**

**quadri** - quadrúpede

**látero** - bilateral

Tabela 4

Bilateral; decatlo; decênio; geometria; hemisfério; hipertensão; hipodérmica; isomorfo; octogenário; ortogonal; perímetro; polígono; polissílaba; quadrilátero; semicircular; transpassar; trissílaba.

Apresentamos apenas algumas possíveis atividades que podem ser desenvolvidas segundo o objetivo que se pretende alcançar: trabalhar a origem de termos da Geometria, visando facilitar sua compreensão e enriquecendo a capacidade dos alunos em relacionar conteúdos.

A experiência anterior do professor ou a adquirida quando do desenvolvimento destas atividades pode levar a novas e ricas atividades que tirem a excessiva carga dada à memória nos métodos tradicionais de ensino, estimulando o raciocínio dos alunos e uma visão mais completa do que aprendem.

Ainda considerando a atenção especial que precisamos dar à questão da linguagem, propomos em seguida um outro jogo, denominado “JOGO DAS PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS”, que objetiva, além de explorar a observação e análise de propriedades de figuras geométricas planas, o uso da linguagem em definições e caracterizações de elementos da Geometria.

Facilita: atenção; percepção espacial; discriminação de atributos; raciocínio lógico; classificação; propriedades numéricas.

Indicação: a partir do 6º Ano do Ensino Fundamental. Para dois participantes ou dois grupos.

Material: um tabuleiro quadriculado com figuras geométricas diversas (ver anexo – na Plataforma); marcadores para os dois jogadores (uma cor para cada jogador) e cartões com propriedades geométricas (ver anexo – na Plataforma).

Procedimento: os cartões de propriedades são embaralhados e colocados em um saco opaco ou caixa. Cada participante, em sua vez de jogar, sorteia dois cartões de propriedades e coloca um de seus marcadores sobre uma figura geométrica do tabuleiro, à sua escolha, que satisfaça as propriedades sorteadas. Se nenhuma figura do tabuleiro satisfizer as duas propriedades ao mesmo tempo, o participante passa a vez. As fichas de propriedade são devolvidas ao saco e as jogadas continuam, alternadamente. Ganha o jogo quem conseguir primeiro uma linha de três marcadores colineares consecutivos de sua cor.

VARIANTE I - Os cartões de propriedades e as figuras do tabuleiro podem ser utilizados para fazer um bingo. Os alunos selecionam seis figuras do tabuleiro, e as traçam em um cartão. O professor ou um aluno sorteia dois cartões de propriedade de cada vez, e os participantes marcam em seus cartões a figura que satisfizer as suas propriedades ao mesmo tempo. Bate o bingo quem marcar primeiro todas as suas figuras.

VARIANTE II – Usar os cartões com propriedades e fichas com figuras geométricas (reproduzir o tabuleiro de formas geométricas (em anexo) e recortar, separando-as). Jogo para 2 a 4 participantes.

Procedimento: antes do início do jogo, embaralhar os cartões de propriedades e colocar a pilha, virada para baixo, sobre a mesa. Cada jogador recebe 8 fichas com figuras geométricas (as que sobrarem ficam de reserva), sorteadas ao acaso. Virar sobre a mesa os dois cartões de propriedade de cima da pilha e, na sua jogada, cada participante coloca sobre a mesa uma de suas figuras, desde que esta satisfaça as propriedades sorteadas.

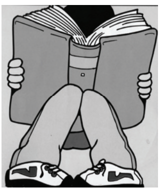
Se não tiver nenhuma figura que possa ser colocada sobre a mesa, retira mais uma ficha com figura (da reserva) e passa a vez. Na rodada seguinte são sorteados dois novos cartões de propriedade e o jogo prossegue como indicado acima. Ganha quem terminar primeiro todas as suas fichas de figuras.

Considerações gerais sobre o jogo

Além de possibilitar a exploração de propriedades gerais de figuras planas, quanto ao número de lados, os tipos de ângulos, a convexidade ou concavidade, as diagonais, entre outras, o professor poderá ainda analisar com a turma, o uso de expressões como “tem dois lados paralelos”, uma vez que isso pode significar que a figura que tem pelo menos dois lados paralelos atende à característica indicada, mas também atenderá aquela que possuir mais de dois lados paralelos, como no caso do quadrado ou do retângulo.

Tais expressões estão presentes e podem gerar uma compreensão equivocada de determinadas definições ou de relações entre definições. Por exemplo, quando definimos um retângulo como sendo um *quadrilátero que lados paralelos dois a dois e quatro ângulos retos*, observa-se que um quadrado satisfaz a definição dada e, portanto, todo quadrado é um retângulo (embora o inverso não seja sempre verdadeiro – só o é nos casos em que os retângulos tiverem todos os lados iguais).

**Dialogando e Construindo Conhecimento**



DICA: no livro O Ensino de Geometria na Escola Fundamental. FONSECA, M. da C, et ali, 2001, você encontra uma interessante atividade, intitulada “Figuras de Linguagem” (p.55-72), na qual são exploradas expressões do cotidiano envolvendo elementos da Geometria.

## 3.2 Considerações gerais sobre Atividades para o ensino de Geometria

Destacando a necessidade de resgate do ensino de Geometria a partir do final da década de 1970, os pesquisadores Nacarato e Passos (2003) assinalam a ampla divulgação que deveriam ter as recomendações feitas na Conferência “Perspectivas para o Ensino da Geometria no Século XXI”, realizada na Itália em 1995.

Em resumo, ressaltam (p.28-30) as principais recomendações:

1) a inclusão da Geometria bi e tridimensional nas séries iniciais do Ensino Fundamental, preparando os alunos para “descrever, desenhar e classificar figuras; de investigar e predizer o resultado de combinar, subdividir e transformar figuras; de desenvolver a percepção espacial; de relacionar ideias geométricas com ideias numéricas e de medição; de reconhecer e apreciar a geometria de seu mundo”;

2) evitar a substituição dos conteúdos da Geometria pelos de medidas;

3) reduzir as atividades centradas na memorização de nomes, fatos e relações;

4) centrar o estudo de Geometria nas séries iniciais do Ensino Fundamental em atividades e não em conteúdos formais;

5) proporcionar o contato com a Geometria ao longo do ano letivo e não apenas em unidades isoladas do programa;

6) realizar atividades que possibilitem a conexão da Geometria com outras disciplinas (Artes, Geografia, entre outras);

7) proporcionar, se possível, o estudo de conteúdos extra-curriculares e não tradicionais (por exemplo: teoria dos nós, geometrias não-euclidianas, etc);

8) proporcionar aplicações do conteúdo, em especial das séries finais do Ensino Fundamental, em situações reais;

9) antecipar noções de geometria analítica, sem enfatizar o formalismo;

10) ensinar em uma perspectiva histórico-metodológica, uma vez que há muitos episódios históricos significativos da Geometria que podem ser trabalhados em sala de aula;

11) capacitar os professores da rede para o ensino de Geometria;

12) utilizar a Geometria como instrumento para compreensão da realidade, uma vez que ela é o ramo mais concreto e intuitivo da Matemática e

13) desenvolver a formação visual do aluno com o auxílio de novos recursos tecnológicos, por meio da Geometria.

Em razão das ricas possibilidades de apelo à percepção e facilidade de recursos do cotidiano para exploração em atividades voltadas para o ensino de Geometria, sugerimos diversos materiais que podem constituir um laboratório básico para esse campo de conhecimento da Matemática.

Como em todo processo de ensino baseado em atividades que possibilitam a participação ativa dos alunos, sugerimos a elaboração antecipada de questões que visem o aprofundamento do conhecimento envolvido em cada ação. Em geral, diversas novas questões são apresentadas pelos alunos durante a aula, cabendo ao professor aproveitá-las ao máximo, sendo de igual importância a discussão dos resultados e o registro escrito destes, visando preparar o aluno para as fases de abstração e formalização.

Estes são passos que sucedem à atividade prática (realização da atividade): a matematização inicial (que pode ser representada por um registro gráfico) e a abstração de regras gerais, propriedades e relações entre conceitos geométricos, e entre estes e conceitos aritméticos e algébricos.

Dentre muitos materiais que poderão compor a lista, recomendamos:

1) Embalagens de diversas formas, materiais e capacidades – elas poderão ser exploradas em atividades de representação (vistas, perspectiva, etc); em planificações; na composição de maquetes; entre outras;

2) Modelos de sólidos e esqueletos de sólidos geométricos diversos – os materiais poderão ser: cartolina, cartão, madeira, canudos de refrigerante, mdf, etc. Os sólidos poderão servir de referência para atividades de relacionamento das formas estudadas formalmente e aquelas com as quais se assemelham objetos do cotidiano (exemplos: cubos e dados numerados; prismas retangulares e caixas de sapato, etc, para o estudo de propriedades; em atividades de representação, entre outras;

3) Quebra-cabeças geométricos espaciais (ex: Somacubo, Pirâmide de duas ou três peças) e planos (ex: Tangram, Ovogram, Falácias geométricas, Pentaminós) – os quebra-cabeças possibilitam o desenvolvimento de habilidades específicas muito importantes não apenas para a aprendizagem de Matemática, mas de outras disciplinas, a exemplo da concentração, persistência, percepção de forma e posição, etc;

4) Materiais de desenho (régua, esquadros, transferidor, compasso) – o uso correto de instrumentos de desenho deve ser fruto de atenção especial por parte do professor;

5) Instrumentos de medição (fitas métricas, paquímetros, vasilhames; balanças, termômetros) – além de aprender a utilizar corretamente os instrumentos de medida, é importante estimular a capacidade de estimativa

daquilo que se quer medir (segmentos de reta, ângulos, áreas, etc). Os alunos deverão fazer uma estimativa e, depois de realizar a medição, verificar se sua previsão estava próxima ou não da medida real;

6) Geoplanos (ex: circulares, quadriculados) – os geoplanos permitem a exploração de inúmeras atividades relativas a conteúdos da Geometria Plana;

7) Elementos da natureza (ex: sementes, folhas secas, conchas) – que possam ser analisados segundo conceitos como simetria;

8) Reproduções de obras de arte que envolvam elementos geométricos, a exemplo das pinturas de Paul Klee, Volpi, Picasso, Kandinsky, etc.

9) Jogos envolvendo Geometria;

10) DVD e softwares diversos;

11) Livros paradidáticos – com curiosidades; atividades e história da Geometria.

A relação pode ser ampliada pelo professor, na medida em que forem coletadas outras sugestões, a partir da socialização com colegas ou por meio de pesquisas em livros e na Internet.

## 3.3 Atividades de exploração do espaço e forma

De acordo com Nacarato e Passos (2003, p.41), “propostas curriculares atuais – tanto no âmbito nacional quanto internacional – vêm defendendo, principalmente nas séries iniciais da Educação Básica, um ensino de Geometria de caráter mais experimental”. Para estes autores, a generalidade e abstração dos conceitos geométricos são construções lentas, que se processam em um processo dialético que envolve as relações do aluno com o mundo físico e suas reflexões mentais sobre esse mundo.

Argumentam ainda que a realidade atual é que pouco se tem trabalhado de Geometria nas escolas, apesar da grande importância desse campo de conhecimento para a formação do aluno. Acreditam que essa realidade mudará apenas quando uma atenção especial lhe for dada nos cursos de formação inicial e continuada de professores, de modo que estes possam efetivamente mediar a construção do conhecimento geométrico por parte do aluno, de modo significativo.

Deste modo, considerando a importância de levar o aluno a realizar atividades com variados materiais manipulativos, que possam propiciar modelos mentais sobre os quais refletirá e elaborará seu conhecimento. Apresentaremos, em seguida, diversas sugestões de atividades que visam ampliar a formação do pensamento geométrico e servir de base para a elaboração de outras propostas, relativas a conteúdos e/ou conceitos que, em razão das limitações de espaço e  tempo, não foram explorados em nosso texto.

Destacamos os cuidados pertinentes aos primeiros contatos do aluno com os conceitos geométricos, evitando-se a ênfase à nomenclatura, e fazendo prevalecer a capacidade de observação de propriedades e regularidades dos objetos geométricos estudados. Em especial evidenciamos a necessidade de trabalhar com atenção os conceitos e cálculos de perímetro e área de figuras planas, os quais têm sido fonte de muita confusão por parte dos alunos, ao fazerem generalizações equivocadas envolvendo as duas grandezas. É comum acharem, por exemplo, que se duas figuras têm mesmo perímetro terão, necessariamente, a mesma área, ou vice-versa. Para evitar esse tipo de equívoco, é preciso que o aluno vivencie diversas situações a partir das quais possa tirar conclusões adequadas. Tais atividades não precisam ser complexas, mas diversificadas.

### SUGESTÃO DE ATIVIDADE 1. ESTUDO DE QUADRILÁTEROS

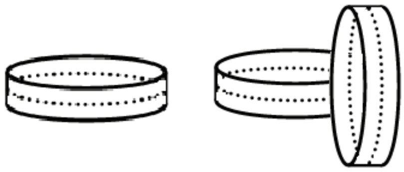
Facilita: introdução ao estudo de quadriláteros (propriedades, nomenclatura)

Material: papel, cola e tesoura.

Procedimento: cortar algumas tiras de papel com aproximadamente 30 cm de comprimento e 4 cm de largura (pode dividir folhas de papel ofício ou papel jornal em quatro partes iguais, no sentido do comprimento). Depois de recortadas, colar as tiras formando cada uma um anel comum de papel, como na figura dada abaixo.

Questões a serem investigadas:

1- O que acontece quando cortamos o anel ao meio (na linha pontilhada, na ilustração da esquerda na figura dada - o pontilhado não precisa ser feito na tira, na ilustração serve apenas para indicar onde deverão ser realizados os cortes com a tesoura). Cortar o anel e conferir o resultado.



2- Colar dois anéis iguais ao primeiro**,** um perpendicular ao outro (como indicado na ilustração da direita, na figura dada). O que acontece se cortarmos ao meio os dois anéis colados, como fizemos com o anel da questão 1?

OBSERVAÇÃO: quando o primeiro anel é cortado, o conjunto fica semelhante a uma algema (uma tira com duas argolas, uma em cada extremidade). Em seguida, cortar a tira ao meio, pois esta corresponde a uma das argolas que estavam inicialmente coladas.

3- Como deveriam ser colados os anéis para o resultado ser um losango (não quadrado)? Os dois anéis iniciais devem ser de mesmo tamanho?

4- Como devem ser os anéis iniciais (de mesmo tamanho ou diferentes?) para o resultado ser um retângulo (não quadrado)? Os anéis devem ser colados perpendiculares um ao outro, ou não?

5- Como devem ser os anéis, e como colá-los, para resultar em um paralelogramo (não quadrado)?

OBSERVAÇÃO: observar/explorar os elementos de todas as figuras obtidas, suas definições e interseções entre estas, como por exemplo, a de que todo quadrado é um retângulo.

SOLUÇÕES: 1- Dois anéis de mesmo tamanho e largura; 2- Depois de cortados os dois anéis, teremos um quadrado (organize o resultado sobre uma superfície plana); 3- De mesmo tamanho, colados inclinados um em relação ao outro;

4- De tamanhos diferentes, colados perpendiculares um ao outro; 5- De tamanhos diferentes, colados inclinados um em relação ao outro; 6- O trapézio (não paralelogramo), ao contrário dos quadriláteros obtidos anteriormente, tem apenas dois lados paralelos.

Muitas outras investigações podem ser feitas: (i) colar três anéis de mesmo tamanho, cada um perpendicular ao seguinte e cortar os três ao meio, tentando estimar e verificando o resultado; (ii) colar três anéis de tamanhos diferentes, dispostos entre si como no caso anterior. Ou três iguais colados inclinados um em relação ao outro, estimar e verificar o resultado, entre outras.

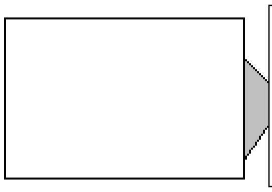
Caso sejam feitas várias investigações em sala de aula, solicitar dos alunos que façam um pequeno relatório ou tabela, descrevendo a dimensão dos anéis (se todos de mesmo tamanho ou não); a quantidade de anéis utilizada em cada caso; como estavam colados uns em relação aos outros (se perpendiculares, inclinados, etc) e os resultados obtidos, explorando as características/propriedades das figuras resultantes.

## SUGESTÃO DE ATIVIDADE 2. EXPLORANDO PROPRIEDADES NO ESTUDO DE POLÍGONOS

Facilita: estudo das propriedades de polígonos através da apresentação parcial de elementos.

Material: envelope de papel pardo – tamanho ofício ou maior; polígonos diversos recortados em cartolina, no tamanho de, aproximadamente, um terço do envelope – os polígonos podem ser: triângulos (retângulos, isósceles, obtusângulos, etc), quadrados, retângulos, losangos, trapézios (isósceles, retângulos), hexágonos, pentágonos, etc. Escolha, sempre, os polígonos com os quais está trabalhando com os alunos introduzindo, no máximo, uma ou duas novas figuras.

Procedimento: as figuras geométricas são colocadas no envelope e é exibido inicialmente apenas um dos vértices da figura, para que sejam discutidas todas as possibilidades.



Propor questões do tipo: *Este polígono pode ser um quadrado? Por que? E um retângulo? Pode ser um triângulo? E um trapézio? Por que?* (fazer outras questões de mesma natureza).

Em seguida mostrar mais um vértice da figura, pedindo que os alunos citem agora todas as possibilidades.

Podemos ajudar os alunos a pensarem nas possibilidades*: A figura pode ser um triângulo? A figura pode ser um losango? Por que?* (fazer outras questões de mesma natureza).

Pode-se seguir mostrando mais partes da figura (outro vértice, mais um lado, etc) ou, ainda, apresentar, oralmente, outras características daquele polígono (ex: não tem três lados, tem dois lados paralelos, etc), até que os alunos descubram o polígono escondido. A atividade pode ser repetida com outras figuras do envelope, sempre questionando as propriedades dos polígonos explorados, destacando-se, por exemplo: “como o primeiro ângulo mostrado não era reto, a figura não podia ser nem um quadrado, nem um retângulo”, para que os alunos identifiquem e relacionem as diversas propriedades que caracterizam cada polígono.

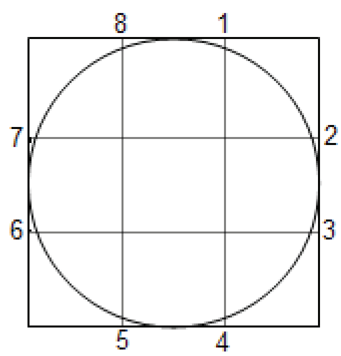
Os alunos poderão organizar um relatório onde irão listar, a cada passo, a parte da figura que podem visualizar, as possibilidades para a mesma, em função do que observou (o que a figura pode ser e o que não pode ser), entre outros

**SUGESTÃO DE ATIVIDADE 3. ÁREA DO CÍRCULO: Valor aproximado (método egípcio)**

Facilita: cálculo da área do círculo; tópico de história da Matemática; relação entre valor aproximado e valor exato; a ideia de erro.

Material: papel, lápis, régua e compasso.

Procedimento: como calcular a área de um círculo dado de modo a não utilizar a fórmula padrão, obtendo um valor aproximado do valor exato?




SOLUÇÃO: 1- Traçar o círculo com o raio indicado, usando um compasso; 2- Inscrever o círculo em um quadrado com lados iguais ao diâmetro do círculo, como indicado na figura; 3- Dividir os lados do quadrado em três partes iguais e quadriculá-lo.

4- A área do círculo será aproximadamente igual à área do octógono formado unindo-se os pontos de 1 a 8 indicados na figura (determinados pela interseção das linhas tracejadas e os lados do quadrado); 5- Verificar qual a diferença entre os valores da área do círculo obtida deste modo e a área obtida através da fórmula tradicional dada por $A = \pi r^2$ (caso os alunos já tenham estudado números irracionais e a fórmula tradicional para o cálculo da área do círculo).

A atividade pode ser realizada com alunos das séries iniciais do Ensino Fundamental, uma vez que o cálculo da área aqui sugerido não envolve o uso de $\pi$, mas apenas as operações básicas com números racionais (fracionários/decimais). Como o valor final obtido é muito próximo do que teríamos com a fórmula tradicional, os resultados do cálculo da área empregando-se o método egípcio apresentam uma margem pequena de erro.

## SUGESTÃO DE ATIVIDADE 4. EXPLORANDO EMBALAGENS

Facilita: representações numéricas; sistemas de medida; unidades de medida; formas; leitura e interpretação de valores numéricos.

Material: embalagens das mais diversas formas, materiais e produtos (caixas de biscoito, latas de leite e chocolate, embalagens de sabonete, shampoo, etc.).

Procedimento: as embalagens apresentam um universo de informações matemáticas de grande importância, principalmente em função do seu valor social. Apresentamos em seguida um conjunto de sugestões de atividades não apenas do campo da Geometria, mas também da Aritmética.

1- Verificar e listar alguns tipos de números que aparecem nas embalagens (números naturais, números fracionários ou decimais), agrupando-os convenientemente. Os alunos poderão organizar tabelas ou cartazes com os resultados observados;

2- Identificar as unidades de medida utilizadas em cada embalagem (g, Kg, l, ml, etc.) e, sempre que possível, estabelecer relações entre elas. Fazer cartazes com os resultados das observações. Os alunos poderão separar, nos cartazes, os produtos que são vendidos em quilos, em litro, em grama, etc;

3- Localizar e analisar a forma de indicação da data de validade do produto – antes deste ser aberto (se o local e o tamanho da letra são adequados; que tipos de produtos têm maior prazo de validade; que fatores poderiam diminuir o prazo de validade do produto como, por exemplo: mau acondicionamento ou transporte). O professor de Ciências poderá fazer uma atividade integrada com o de Matemática;

4- Comparar, considerando dois produtos similares (mesma função e quantidade) mas de preços/ marcas diferentes, quais as variantes entre estes (se nos componentes, na proporção entre eles, na embalagem, etc);

5- Fazer a planificação de caixas diversas identificando os tipos de polígonos que as compõem (destacar as diferenças de nomenclaturas do tipo: lado; vértice; face; aresta, etc). Pintar, na planificação, cada par de faces opostas da embalagem de uma cor. Verificar qual a relação entre as faces pintadas de mesma cor. Calcular a área de cada face e a área total da embalagem, bem como seu volume (a seleção do que poderá ser feito em sala de aula, dependendo da série do aluno, fica a critério do professor);

6- Analisar, para um mesmo tipo de produto de marcas diferentes, quais as qualidades que são ressaltadas nas embalagens. Pesquisar que modificações podem ser feitas para tornar um produto mais barato (modificar a embalagem, a forma de distribuição, etc);

7- Comparar embalagens de tamanhos diferentes mas correspondentes a um mesmo volume (por exemplo, uma caixa de ½ kg de sabão e uma de 1 kg de café), identificando as causas das variações nas dimensões das caixas;

8- Utilizar as embalagens em atividades de simulação de uma feira, envolvendo compras e vendas (acompanhadas sempre pelos registros, que serão posteriormente analisados e discutidos), com cédulas de 1, 10 e 100 unidades monetárias, realizando o trabalho de agrupamento e troca, característicos do sistema decimal (o que facilitará a compreensão dos algoritmos da adição e da subtração com reserva);

9- Criar problemas diversos envolvendo valores numéricos das embalagens (data de validade, volume, preço, etc) e operações variadas. Discutir as estratégias de solução adotadas.

10- Com uma caixa de sapatos ou outra similar, organizar uma “Problemoteca de Geometria” (conjunto de problemas relacionados ao campo geométrico, envolvendo principalmente o raciocínio lógico, a capacidade de visualização, discriminação de forma e posição, a observação de propriedades e o estabelecimento de relações entre estas;

11- Elaborar maquetes (da sala de aula, da escola, de uma rua ou cidade), aproveitando as diferentes formas e tamanhos das embalagens. Na confecção explorar relações de lateralidade, de organização espacial, de representação (fazer, por exemplo, o desenho da planta baixa da maquete), entre outras.

## SUGESTÃO DE ATIVIDADE 5. EXPLORANDO RELAÇÕES ENTRE PERÍMETRO E ÁREA DE POLÍGONOS

Facilita: estudo das grandezas associadas aos polígonos; relação entre Geometria e Aritmética.

Material: papel quadriculado; lápis e borracha.

Procedimento: solicitar que os alunos tracem no papel quadriculado todos os retângulos que puderem identificar, cujos lados tenham medidas inteiras, e mesma área. Por exemplo, todos os que têm área igual a 12 unidades quadradas. Como resultado obteriam os retângulos de lados iguais a: (i) 1 e 12 unidades;(ii) 2 e 6 unidades; (iii) 3 e 4 unidades. Os perímetros desses retângulos, calculados pelos alunos, seriam, respectivamente: (i) 26 unidades; (ii) 16 unidades e (iii) 14 unidades.

Feitos outros exemplos, com áreas fixas de diversos valores. Proceder na direção inversa, ou seja, fixar o perímetro e tentar obter retângulos com formas diferentes e lados inteiros, considerando-se o valor determinado, calculando-se a área correspondente de cada retângulo. Analisando-se os resultados dos diversos desenhos e cálculos realizados, explorar as relações de dependência ou não, entre perímetro e área.

O professor pode, ainda, explorar a relação que é possível estabelecer entre os resultados obtidos e o estudo dos divisores de um número natural, uma vez que as medidas dos lados dos retângulos traçados pelos alunos serão os divisores dos números correspondentes às suas respectivas áreas. Por exemplo, no caso em que a área era igual a 12 unidades quadradas, os valores para as medidas dos lados dos retângulos eram 1, 2, 3, 4, 6 e 12, que correspondem aos divisores de 12. Nos casos em que o número correspondente à área é primo, só será possível traçar um retângulo com lados de medidas inteiras, dadas pelo próprio número e a unidade. Para exemplificar, considere o retângulo de área igual a 7 unidades quadradas. Com esta área só poderíamos traçar o retângulo de lados com medidas inteiras iguais a 7 e 1 unidade.

Observação: para explorar as relações que existem ou não entre perímetro e área de polígonos, esta atividade envolve apenas figuras retangulares, mas devem ser sugeridas atividades com figuras planas quaisquer, para as quais, fixando-se o valor da área, observa-se variação nos perímetros, dependendo da forma da figura, para evitar que os alunos pensem que esta relação seria diferente caso as figuras não fossem retangulares.

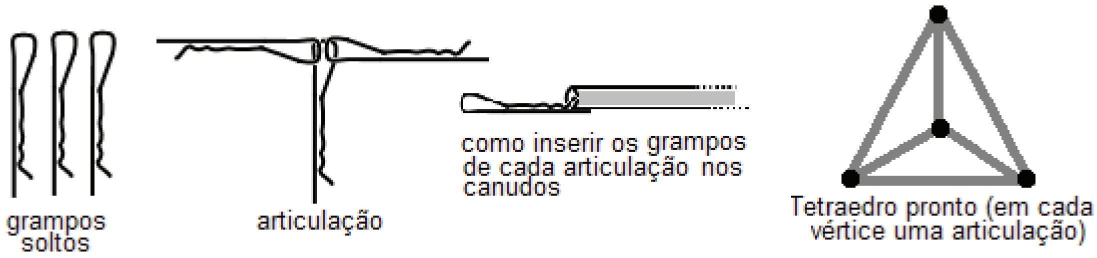
## SUGESTÃO DE ATIVIDADE 6. CONFECÇÃO DE ESQUELETOS DE POLIEDROS

Os esqueletos de poliedro confeccionados pelos alunos poderão ser explorados posteriormente no estudo de propriedades de sólidos; de planos de simetria; do Teorema de Euler; no desenho de sua representação no plano, dentre outros.

Material: grampos pequenos de cabelo (de metal, comuns) e canudos de refrigerante.

Procedimento: o processo de confecção dos poliedros é bastante simples e as vantagens do material são muitas: baixo custo, facilidade de uso, rapidez do processo e possibilidade de reaproveitamento do material. O número de canudos utilizados em um poliedro será igual a seu número de arestas e o número de grampos será igual à soma do número de arestas que convergem para cada vértice do sólido.

Acompanhe o seguinte exemplo, com a construção do esqueleto de um tetraedro (pirâmide de base triangular) regular, para o qual iremos precisar de seis canudos e 12 grampos de cabelo. Inicialmente prender cada grupo de três grampos entre si, formando quatro sistemas de articulação, como indicado na ilustração do centro na ilustração abaixo. Depois de prontas as articulações, inserir a parte ondulada dos grampos no interior dos canudos (ilustração da direita na figura da direita), correspondendo a cada conjunto de três grampos um vértice do tetraedro, prendendo os seis canudos.




Este poderá ser posteriormente desmontado e grampos e canudos serem utilizados na construção de outros poliedros, modificando-se a quantidade de canudos e/ou a quantidade de grampos em cada sistema de articulações, de acordo com as necessidades. Neste caso, como em qualquer caso de construção de esqueletos de poliedros, a rigidez da figura dependerá da forma de suas faces: se apenas triangulares a figura será rígida, caso contrário ficará flexível.

A capacidade de visualização, representação e leitura de figuras espaciais apresentadas em imagens planas, depende da experiência pessoal do aluno com objetos tridimensionais, com os quais devemos explorar não apenas o conteúdo de Geometria Plana, mas as relações entre os elementos desta e os da Geometria Espacial.

## 4. Avaliando o que foi construído

Resolva as questões de 1 a 5 da página 6 do texto “Quebra-cabeças”, postado na Plataforma, identificando os conteúdos/procedimentos envolvidos em cada uma delas.

## 5. Referências

NACARATO, Adair M; PASSOS, Cármen L. B. A Geometria nas séries iniciais: uma análise da prática pedagógica e da formação de professores. São Paulo: EdUFSCar; 2003.

RÊGO, Rogéria G., RÊGO, Rômulo M., GAUDENCIO JÚNIOR, Severino. *A geometria do origami.* João Pessoa, PB: EdufPB, 2003.

RÊGO, Rogéria G., RÊGO, Rômulo M., Matematicativa. João Pessoa, PB: EdufPB, 2003.