Disciplina: Matemática para o Ensino Básico II

Prof. Edson de Figueirêdo Lima Jr.
Curso de Matemática – **UFPB**VIRTUAL
edsonjr@mat.ufpb.br

Ambiente Virtual de Aprendizagem: Moodle (www.ead.ufpb.br)
Site do Curso: (www.mat.ufpb.br/ead)
Site da **UFPB**VIRTUAL www.virtual.ufpb.br
Telefone **UFPB**VIRTUAL (83) 3216 7257

Carga horária: 60 horas **Créditos: 04**

Ementa

Funções; Funções do 1º grau; Função do 2º grau; Funções Exponencial e Logarítmica; Funções Trigonométricas.

Descrição

A disciplina consiste em uma apresentação seqüencial de conceitos, propriedades, resultados derivados e aplicações, integrantes de um estudo que possui funções reais de uma variável como foco primário. Procura-se expor o conceito geral de função matemática para, a partir daí, visitar, sucessivamente, os principais tipos de funções elementares, analisando, em cada caso, elementos constitutivos básicos, como domínio, contradomínio e imagem, estendendo-se a investigações que visam estabelecer variação de sinal, crescimento e/ou decrescimento e representação gráfica.

O programa da disciplina divide-se em seis unidades, das quais a primeira e a quarta são responsáveis pela introdução de conceitos e resultados utilizados como fundamentos na apresentação individual das funções do 1º Grau, Quadráticas, Exponenciais, Logarítmicas e Trigonométricas, que correspondem ao conteúdo das quatro unidades complementares. Em cada estudo específico, busca-se a caracterização da função por meio de propriedades que possibilitem ao estudante estabelecer correspondências entre determinadas situações-problema da vida real e a espécie de função focalizada, objetivando sua utilização na construção de uma tradução matemática da respectiva situação.

Objetivos

Ao final do curso, espera-se que o aluno

- possua competência referente à compreensão do significado matemático de função, aí incluindo-se familiaridade com as noções de domínio, contradomínio, imagem, sistema cartesiano de coordenadas e representação gráfica,

- esteja habilitado a discorrer sobre conceitos contíguos ao de função, como injetividade, sobrejetividade, bijetividade, inversão, composição, paridade e imparidade, crescimento e decrescimento,

- saiba identificar cada um dos tipos de função elementar estudados, associando-os a propriedades que os individualizam, e

- tenha criado uma concepção aplicada do conceito matemático de função, ligando-o, de forma simples, direta e despojada de tecnicismos formais, a outras ciências e a fatos e ocorrências da sua vida cotidiana.

Unidades Temáticas Integradas

Unidade I **Funções: alguns princípios**

- A definição de função
- Sistema cartesiano de coordenadas
- Representação de funções por meio de tabelas e gráficos
- Funções injetora, sobrejetora e bijetora – Função invertível
- Composição de funções
- O conjunto R como fornecedor de domínios

Unidade II **Funções do 1º grau**

- Definindo funções do 1º grau
- Representação gráfica
- Variação do sinal
- Inequações produto e quociente

Unidade III **Função do 2º grau**

- Iniciando o estudo da função e da equação do 2º grau
- Representação gráfica
- Variação do sinal

Unidade IV **Revendo alguns conceitos e ampliando conhecimentos**

- Identificação gráfica de uma função
- Identificação de funções injetoras
- Funções pares e funções ímpares
- Funções crescentes e funções decrescentes
- Bijetividade e inversão

Unidade V **Funções Exponencial e Logarítmica**

- A função exponencial
- Propriedades da potenciação
- Crescimento e decrescimento
- Representação gráfica
- A função logarítmica

- Propriedades do logaritmo
- Representação gráfica
- Equações e inequações exponenciais
- Equações e inequações logarítmicas

Unidade VI **Funções trigonométricas**

- Medindo arcos e ângulos
- A unidade de medida grau
- A unidade de medida radiano
- Convertendo unidades
- Razões trigonométricas em um triângulo retângulo
- Funções trigonométricas
- Valores das funções trigonométricas de ângulos especiais
- Olhando as funções seno e cosseno mais de perto
- Representação gráfica das funções seno, cosseno e tangente

Unidade I Funções: alguns princípios

1. Situando a Temática

Quando falamos que uma coisa é função de outra, queremos dizer, simplesmente, que a primeira delas depende da segunda. Situações de dependência, ou vinculação, fazem-se presentes constantemente em nossa vida. O nosso modo de vestir, por exemplo, está certamente vinculado ao evento do qual vamos participar, ou seja, nosso traje é, normalmente, uma função do tipo de acontecimento ao qual vamos comparecer.

No vocabulário da Matemática, a palavra *função* possui um significado muito mais preciso. Como veremos, não será uma situação qualquer de vinculação que fará por merecer a denominação de função, isto porque o conceito matemático deste tipo de relação de dependência incorpora requisitos bem definidos. Por isso, iniciamos nosso estudo nos informando sobre as normas que impõe a Matemática para a existência de uma função. Vamos descobrir, inclusive, que as funções matemáticas possuem uma linguagem própria, caracterizada por expressões como domínio, imagem, variável independente, variável dependente e muitas outras.

A partir de agora, você está convidado a nos acompanhar neste passeio pelo mundo das funções. Juntos analisaremos detalhadamente suas regras, conheceremos diagramas, tabelas e gráficos, verdadeiras ferramentas de decoração utilizadas para exposição de funções em vitrina, e aprenderemos a realizar operações que, a partir de funções conhecidas, geram novas funções.

2. Problematizando a Temática

No nosso dia-a-dia, mesmo que não percebamos, ocorrem diversas situações que descrevem associações entre pessoas, entre coisas, entre pessoas e coisas, enfim entre conjuntos cujos elementos são caracterizados por alguma propriedade. Considere, por exemplo, a correspondência entre uma pessoa e seu nome. Esta relação pessoa – nome apresenta duas características que merecem destaque:

1) toda pessoa possui um nome e
2) cada pessoa possui um único nome.

Portanto, se designarmos por A o conjunto de pessoas e por B o de nomes, veremos que “a cada elemento de A está associado um único de B”. Nesta observação reside a essência do conceito matemático de função como mecanismo formal de expressar certos tipos de associações.

3.Conhecendo a Temática

3.1 A definição de função

Definição 3.1-1

Se A e B são conjuntos não vazios, uma função de A em B é uma conexão que se estabelece entre estes conjuntos, por meio de uma regra que associa cada elemento de A a um único elemento de B.

De acordo com a definição acima, através de uma função “todo mundo de A é obrigatoriamente associado a alguém de B, não se admitindo que um elemento em A se associe a dois ou mais elementos em B”. Se $\forall$ e $\exists!$ significam, respectivamente, “para todo” e “existe um único”, dizemos, simbolicamente, que uma regra de conexão f é uma função de um conjunto A em outro B, se

$$\forall x \in A, \exists!\, y \in B, \textit{ tal que } y = f(x),$$

o que denotamos por

$$f : A \to B$$
$$x \to y = f(x).$$

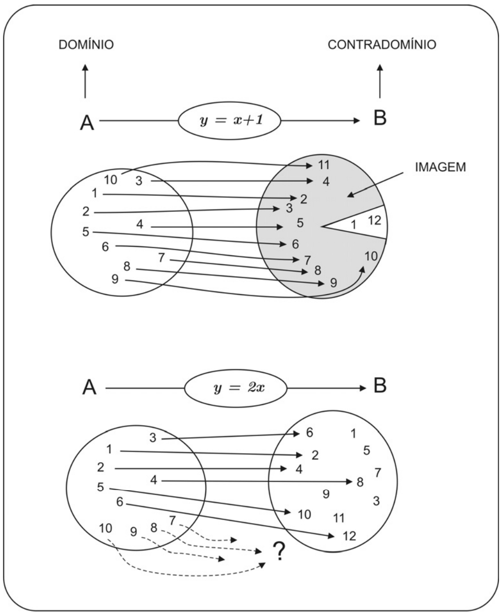
Exemplo 3.1-2

Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Se entre estes conjuntos estabelecermos uma relação por meio da regra $y = f(x) = x + 1$, estaremos definindo uma *função* de A em B, pois *a cada elemento de A está associado um único de B*. Se, por outro lado, associarmos os elementos desses mesmos conjuntos através da regra $y = 2x$, então não teremos uma função de A em B, já que existe elemento em A ($x = 7$ é um deles) que não está associado a qualquer elemento de B. Dizemos, nesse caso, que entre os conjuntos A e B existe, apenas, uma *relação* (Veja a **Figura 3.1-3**).

Sempre que uma função esteja definida, destacam-se através de denominações próprias seus elementos constitutivos. Tomando-se o exemplo anterior por referência, temos o conjunto A como *conjunto de partida* ou *domínio*, ou seja, ambiente onde f atua, e B, como *conjunto de chegada* ou *contradomínio* da função $f(x) = x + 1$. O conjunto $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$, composto pelos elementos y de B que estão relacionados aos elementos x de A por meio de f, é denominado de *imagem* da função.

Finalmente, na regra $y = f(x) = x + 1$, a variável x, que representa elemento do domínio, é chamada de *independente* e a variável y, cujo valor depende do de x, é, por essa razão, chamada de *dependente*.

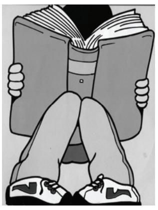
Figura 3.1-3



3.2 Sistema cartesiano de coordenadas

Em uma reta numerada, vamos chamar de *ponto* cada um de seus números. Em um plano, um *ponto* corresponderá a um par de números.

Ampliando o seu Conhecimento



Esta idéia de correspondência tendo como referência duas retas numeradas perpendiculares, chamadas *eixos*, foi desenvolvida no século XVII com a destacada participação do matemático e filósofo francês René Descartes (1596-1650), cujo sobrenome em latim escreve-se Cartesius.

Por essa razão, tal sistema de identificação de pontos recebe o nome de *sistema cartesiano* e o plano, por conseqüência, é denominado de *plano cartesiano.*

Nesse sistema, representa-se no eixo horizontal a variável identificada por x, reservando-se o vertical para a identificada por y. Se a partir do ponto x do eixo horizontal, traçarmos uma reta vertical para cima ou para baixo, dependendo de termos $y \geq 0$ ou $y \leq 0$, e a partir do ponto y no eixo vertical, traçarmos uma reta horizontal para a direita ou para a esquerda, dependendo de termos $x \geq 0$ ou $x \leq 0$, localizaremos o ponto (x, y) no cruzamento dessas duas retas.

Devemos observar que:

1) o par (x, y) é *ordenado*, fato que implica no ponto (x, y) ser diferente do ponto (y, x), para $x \neq y$,
2) se um ponto P é identificado geometricamente com um par ordenado (x, y), então este contém as *coordenadas cartesianas* de P, sendo os números x e y chamados, respectivamente, de *abscissa* e *ordenada* daquele ponto,
3) o ponto $(0, 0)$ é chamado de *origem* do sistema e
4) os eixos dividem o plano cartesiano em quatro regiões chamadas *quadrantes*, como mostra a figura ao lado.

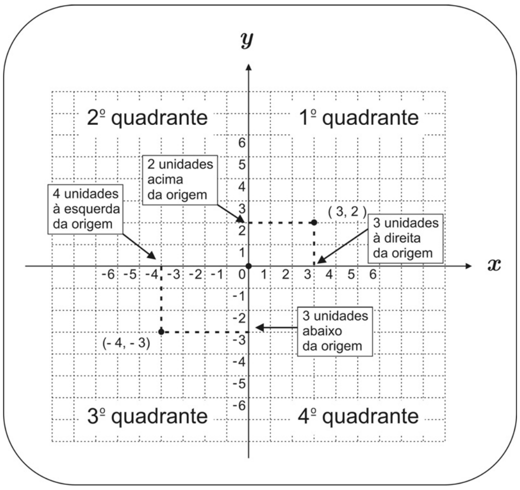


Figura 3.2-1

3.3 Representação de funções por meio de tabelas e gráficos

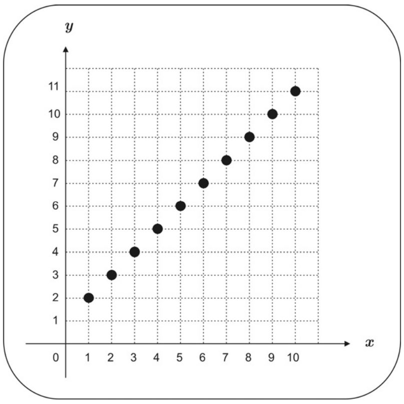
Voltando a considerar a função apresentada no **Exemplo 3.1-2**, vemos que as correspondências por ela estabelecidas entre as variáveis x, do domínio, e y, da imagem, podem ser representadas através da seguinte tabela:

x	$y = f(x) = x+1$
1	2
2	3
3	4
4	5
5	6

x	$y = f(x) = x+1$
6	7
7	8
8	9
9	10
10	11

Dessa tabela formamos o conjunto de pares ordenados $Gr(f) = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 7), (7, 8), (8, 9), (9, 10), (10, 11)\}$, que vem a ser o gráfico da função $y = f(x) = x+1$. No plano cartesiano, esse gráfico possui a representação exposta através da **Figura 3.3-1**.

Figura 3.3-1



3.4 Funções injetora, sobrejetora e bijetora - Função invertível

Definição 3.4-1

Uma função é chamada *injetora*, se elementos distintos do seu domínio possuem imagens distintas. Se o conjunto imagem de uma função é todo o seu contradomínio, então esta função é *sobrejetora*. Uma função injetora e sobrejetora é dita *bijetora*.

Em símbolos da linguagem matemática, a definição anterior fica assim: uma função $f: A \to B$ é injetora se, dados x_1, $x_2 \in A$, com $x_1 \neq x_2$, tivermos $f(x_1) = y_1 \neq y_2 = f(x_2)$. Se $\forall\, y \in B$, $\exists x \in A$, tal que $y = f(x)$, então f é uma função sobrejetora.

A **Figura 3.4-2** mostra-nos três diagramas. De cima para baixo, vemos que o primeiro corresponde ao de uma função apenas injetora, o segundo ao de uma função apenas sobrejetora e o terceiro ao de uma função injetora e sobrejetora, ou seja, bijetora. Vemos, ainda, que só no terceiro, a inversão da correspondência $x \to y$ em $x \leftarrow y$ fornece uma função, também bijetora, tendo como domínio o conjunto B e imagem o conjunto A, como mostra a **Figura 3.4-3**.

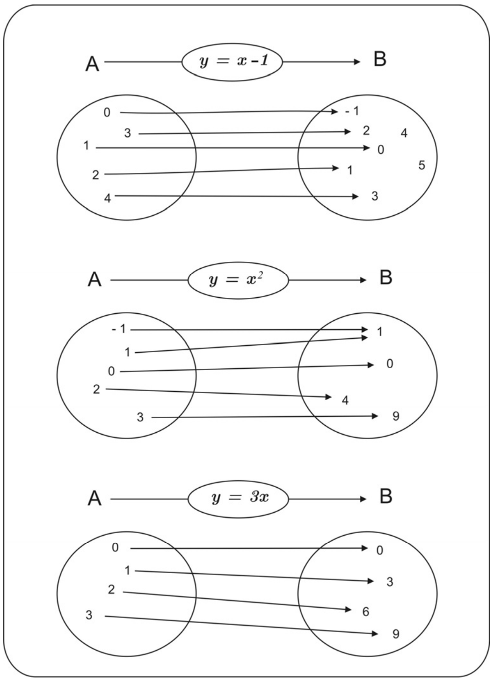


Figura 3.4-2

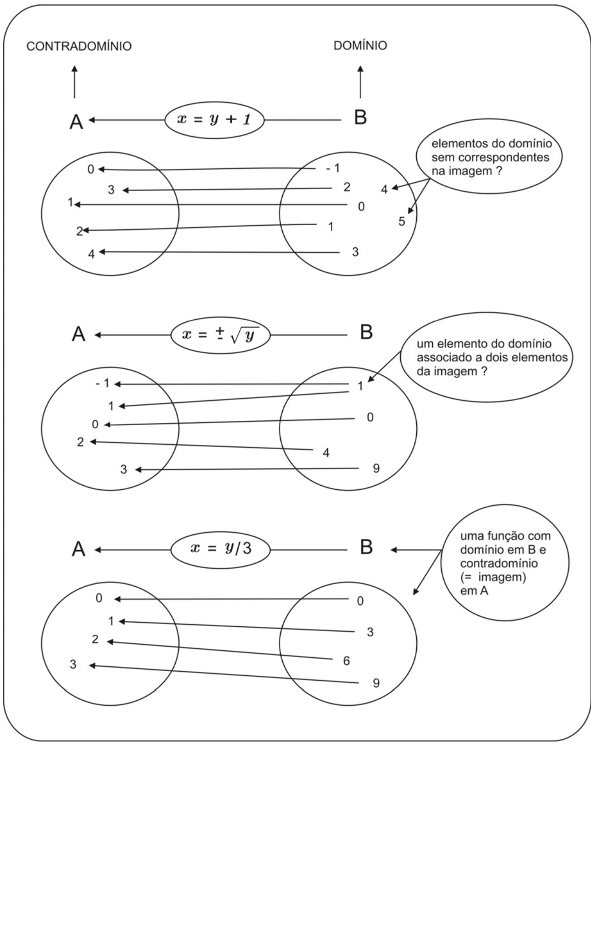


Figura 3.4-3.

Dessa forma, dizemos que

$$f : A = \{0, 1, 2, 3\} \rightarrow B = \{0, 3, 6, 9\}$$

$$f(x) = 3x$$

é uma função *invertível*, sendo

$$g : B = \{0, 3, 6, 9\} \rightarrow A = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$g(y) = y/3$$

a sua *inversa*.

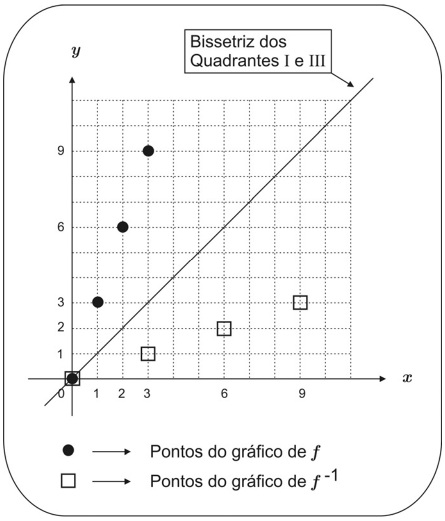
Tendo em vista a convenção de a variável independente ser denotada por x e a dependente por y, é comum expressar a fórmula da função inversa na forma $y = f^{-1}(x)$, o que nos faria reescrever a inversa de $y = f(x) = 3x$ como

$$f^{-1} : B = \{0, 3, 6, 9\} \rightarrow A = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$x \rightarrow y = f^{-1}(x) = x/3.$$

A **Figura 3.4-4** traz as representações gráficas das funções f e f^{-1} acima referidas.

Figura 3.4-4



Para uma função qualquer $f : A \rightarrow B$, as observações feitas a partir da **Figura 3.4-2** podem ser generalizadas nos seguintes termos:

1. Se f é bijetora, então f é invertível.
2. Se f é invertível, então f é bijetora.
3. A inversa de uma função bijetora $f : A \rightarrow B$, com $y = f(x)$, é a função $f^{-1} : B \rightarrow A$, com $y = f^{-1}(x)$, também bijetora, cuja fórmula de definição obtém-se a partir da fórmula de f, explicitando-se x em função de y e, depois, substituindo-se x por y e vice-versa.
4. Os gráficos de f e f^{-1} são simétricos em relação à bissetriz dos primeiro e terceiro quadrantes.

3.5 Composição de funções

Considere $f: A = \{0, 1, 2, 3\} \to B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $g: B \to C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}$ as funções definidas por $f(x) = x + 1$ e $g(x) = 2x$, respectivamente.

Ao representarmos essas funções em diagrama único, como o da **Figura 3.5-1**, podemos interpretar as correspondências $x \to y$ nele descritas como vôos com origem nos pontos localizados em A e destino em pontos situados em C, com escala em pontos de B. De fato, a correspondência $0 \to 2$ dá-se em virtude da sucessão das associações $0 \to 1$ e $1 \to 2$, a correspondência $3 \to 8$, em virtude da sucessão das associações $3 \to 4$ e $4 \to 8$, e assim por diante.

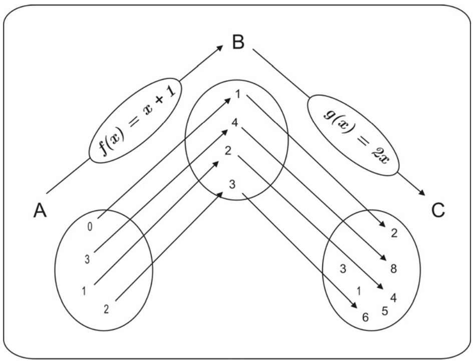


Figura 3.5-1

Surge, então, a pergunta: Existe uma função que desempenhe o papel de *vôo direto* de *A* para *C*, sem a necessidade da escala em *B*?

A resposta à questão anterior é afirmativa. Chamando de h tal função e notando que

$$h(0) = 2 = g(1) = g(f(0))$$
$$h(1) = 4 = g(2) = g(f(1))$$
$$h(2) = 6 = g(3) = g(f(2))$$
$$h(3) = 8 = g(4) = g(f(3)),$$

temos que para cada $x \in A$, $h(x)$ assume, precisamente, o mesmo valor que $g(f(x))$. Este fato leva-nos a deduzir que a função h pode ser definida como

$$h: A \to C$$
$$x \to h(x) = g(f(x)) = 2(x+1) = 2x + 2.$$

Observe que a lei de correspondência estabelecida pela função h fará sentido, se para todo $x \in A$, tivermos $f(x)$ no domínio de g, pois, só assim, fica garantida a existência do valor $g(f(x))$.

O caso particular que acabamos de descrever é generalizado através da seguinte definição.

Definição 3.5-2

Dadas funções $f: A \to B$ e $g: B \to C$, podemos definir a função $h: A \to C$ através da fórmula $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$, sempre que a imagem da f seja subconjunto do domínio da função g. A função h assim definida recebe o nome de *composta* da função g com a função f.

3.6 O conjunto $\mathbb{R}$ como fornecedor de domínios

As funções objeto do nosso estudo são funções reais de uma variável real, ou seja, regras de correspondências do tipo $y = f(x)$, nas quais x e y são números reais. Como vimos, uma regra dessa natureza definirá uma função, se a cada valor de x corresponder um único de y. Dessa forma, de posse de uma regra *unívoca*, isto é, que a um elemento x associe um único elemento y, uma questão apresenta-se como fundamental na definição de uma função de variável real: quais números reais x podem servir para gerar correspondências por meio da regra $y = f(x)$?

De acordo com a **Definição 3.1-1**, resolver essa questão é determinar o domínio da função, o qual poderá ser o conjunto $\mathbb{R}$ ou um seu subconjunto, dependendo de a fórmula utilizada para definir a função envolver, ou não, duas operações que possam provocar situações de risco no estabelecimento da correspondência entre variáveis x e y reais: *divisão*, porque denominadores não podem se anular, e *radiciação* com índice par, porque, em $\mathbb{R}$, esta operação não admite radicandos negativos. Veja o exemplo abaixo.

Exemplo 3.6-1

Se considerarmos a regra $y = 1/(x-1)$, observamos que $x = -1$, $x = 0$, $x = 2$ e $x = 1/2$ são exemplos de valores da variável x que geram correspondências, sendo estas, respectivamente, $y = -1/2$, $y = -1$, $y = 1$ e $y = -2$.

Contudo, não encontramos qualquer y que esteja associado a $x = 1$, isto porque é este o valor da variável x que anula o denominador da fórmula que define a função. Como este é o único valor com tal característica, concluímos que o conjunto

$$\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq 1\} = \mathbb{R} - \{1\}$$

é o domínio da função definida por $y = \dfrac{1}{x-1}$.

Por outro lado, se quisermos que a fórmula $y = \sqrt{x-2}$ defina uma função, do domínio desta seremos obrigados a eliminar todos os valores de x menores que 2, já que $\sqrt{x-2}$ constitui um número real y, somente se $x - 2 \geq 0$, ou seja, se $x \geq 2$. Neste caso, portanto, $\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq 2\}$ = $[2, +\infty)$ é o conjunto a ser tomado para domínio da função definida pela fórmula $y = \sqrt{x-2}$.

Finalmente, notamos que na fórmula $y = 2x - 1$ qualquer valor da variável x gera um correspondente valor da variável y, sendo, por conseguinte, $\mathbb{R}$ o domínio da função definida por essa regra associativa.

4. Avaliando o que foi construído

Nesta unidade você travou o primeiro contato com as funções matemáticas, foi apresentado ao plano cartesiano, aprendeu a identificar algumas características especiais em funções, viu como se processa uma composição entre elas e pode constatar que situações problemáticas são possíveis de ocorrer quando o conjunto dos números reais atua como fonte de domínios.

Foi realmente grande o volume de conhecimentos apresentados. Porém, fique certo, ainda há muito que aprender dentro desses mesmos tópicos. Você sabe, por exemplo, o significado de *produto cartesiano*? Você saberia dizer se a operação de composição de funções é *comutativa*, ou seja, se dadas duas funções f e g quaisquer, tem-se sempre $f \circ g = g \circ f$?

No Moodle...

Pois é. Você precisa visitar o espaço reservado à disciplina Matemática para o Ensino Básico II na plataforma MOODLE, onde terá a oportunidade de revisar, testar e enriquecer seus conhecimentos. Lembre-se de que somos parceiros nos estudos e, portanto, eu não pretendo seguir adiante sem que você me acompanhe. Aguardo você no MOODLE!

5. Referências

DANTE, Luiz R., Matemática: Contexto e Aplicações. Editora Ática, Vol. 1, 1a Edição, 1999.
IEZZI, G., Dolce, O., Hazzan, S., Fundamentos de Matemática Elementar, Vol. 1, Editora Atual, 8a Edição, 2004.
LIMA, Elon L., Carvalho, P.C.P., Wagner, E., A Matemática do Ensino Médio, Vol. 1, 2a Edição, Coleção Professor de Matemática, Publicação da Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

Unidade II Funções do 1º grau

1. Situando a Temática

A partir desta unidade, vamos nos dedicar à análise de alguns tipos específicos de funções, começando por aquelas que chamaremos de *Funções do 1º grau*. Nosso estudo nos levará a conhecer os principais aspectos que caracterizam e distinguem estas funções, desde seus elementos constitutivos básicos, como domínio, contradomínio e fórmulas de definição, até sua representação gráfica retilínea.

Veremos que Funções do 1º grau exprimem uma igualdade da forma

*Variável Dependente = Valor Básico + Taxa (ou Declive)***.***Variável Independente,*

onde *Valor Básico* corresponde àquele assumido pela *Variável Dependente* quando a *Variável Independente* é nula. A expressão em símbolos matemáticos desta igualdade corresponderá à definição que adotaremos para essa funções.

Finalizaremos com o estabelecimento de um importante resultado para as Funções do 1º grau, conhecido como *variação do sinal*, que nos capacitará a resolver, com rapidez e eficiência, desigualdades comumente chamadas de *inequações produto e quociente*.

2. Problematizando a Temática

Suponhamos que João tenha adquirido um telefone celular em uma determinada operadora, desembolsando R$ 90,00 pelo aparelho e optando pelo plano de utilização que prevê o pagamento de uma mensalidade de R$ 150,00, independentemente da quantidade e da duração de ligações. Ao final de x meses, qual foi o gasto total de João com o cumprimento do contrato firmado? Em quanto tempo João terá gasto R$ 1.890,00?

Observando que João gastou

R$ 90,00 + 1 $\times$ R$ 150,00	$\rightarrow$	ao final do 1º mês
R$ 90,00 + 2 $\times$ R$ 150,00	$\rightarrow$	ao final do 2º mês
R$ 90,00 + 3 $\times$ R$ 150,00	$\rightarrow$	ao final do 3º mês

e assim sucessivamente, vemos que R$ 90,00 + $x \times$ R$ 150,00 foi o seu gasto ao final de x meses, e a primeira pergunta encontra-se respondida.

Observemos que o gasto a que se refere o problema pode ser representado através de uma função, digamos $G(x)$, cuja regra de definição é escrita como $G(x) = 150x + 90$. Dessa forma, vemos que a solução da segunda questão corresponde ao valor de x para o qual $G(x) = 1890$. Como a equação $1890 = 150x + 90$ possui solução única $x = 12$, afirmamos que em 12 meses, João terá gasto a quantia de R$ 1.890,00 com a compra e utilização do seu aparelho celular.

3. Conhecendo a Temática

3.1 Definindo funções do 1o grau

Os dados e questionamentos apresentados acima nos mostram como um acontecimento real, possível de ocorrer na vida de qualquer indivíduo, pode ser matematicamente representado por meio da utilização de funções adequadas. No caso que acabamos de analisar, uma única função mostrou-se capaz de fornecer, com eficiência, respostas às questões concernentes a despesas de João com o uso do telefone celular. A função $G(x) = 150x + 90$, por expressar-se sob a forma de um binômio de grau 1, é uma *Função do 1º grau*.

Definição 3.1-1

Toda função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por uma expressão da forma $y = f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, é denominada *Função do 1º grau*.

Quando $b \neq 0$, a Função do 1º grau recebe o nome de *Função Afim* e quando $b = 0$, de *Função Linear*. É, portanto, afim a função $G(x) = 150x + 90$, que fornece valores de despesas de João com o celular.

3.2 Representação gráfica

Tratemos agora do gráfico de uma Função do 1º grau. Para tanto, vamos tomar como referência os casos particulares das funções $y = 2x$ e $y = 2x - 4$, considerando as tabelas que relacionam valores de x e $y = f(x)$ para essas funções.

x	$y = 2x$	x	$y = 2x$
-3	-6	1/3	2/3
-2	-4	1/2	1
-1	-2	1	2
-1/2	-1	3/2	3
0	0	2	4
		3	6
		4	8

x	$y = 2x - 4$	x	$y = 2x - 4$
-3	-10	1/3	-10/3
-2	-8	1/2	-3
-1	-6	1	-2
-1/2	-5	3/2	-1
0	-4	2	0
		3	2
		4	4

Mesmo que façamos a variável x assumir dezenas de valores em $\mathbb{R}$, vamos concluir que todos os pontos (x, y) gerados pela função $y = 2x$ possuem o mesmo lugar geométrico no plano cartesiano: uma linha reta. Assim, dizemos que o gráfico dessa função é a reta de equação $y = 2x$. Situação completamente equivalente ocorre em relação à função $y = 2x - 4$, cujo gráfico é, portanto, a reta $y = 2x - 4$. Como dois pontos distintos determinam uma reta, vemos que para esboçar o gráfico das funções $y = 2x$ e $y = 2x - 4$ precisávamos de apenas dois dos pontos de cada uma das tabelas anteriores. A **Figura 3.2-1** traz os gráficos citados.

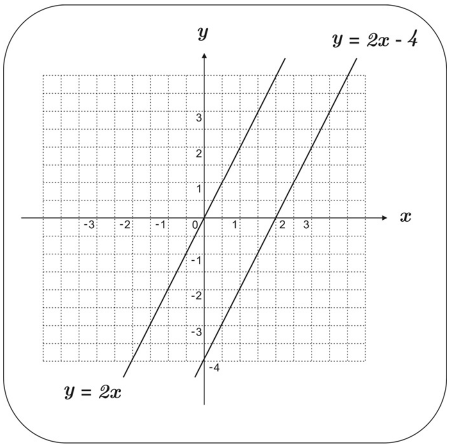


Figura 3.2-1

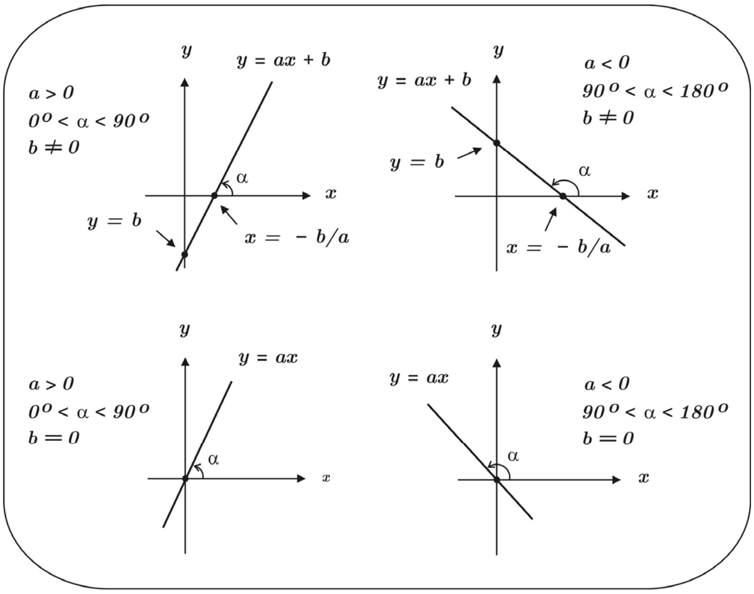
A Função do 1º grau possui importantes características que se destacam em sua representação gráfica. Façamos o registro de algumas dessas características, combinando a leitura das observações que seguem com a análise dos gráficos constantes da **Figura 3.2-2**.

1) A *inclinação* de uma reta $y = ax + b$, com $a \neq 0$, é dada pelo ângulo θ que esta forma com o eixo X. Medindo-se θ no sentido anti-horário, temos $0^0 < \theta < 90^0$, se $a > 0$, e $90^0 < \theta < 180^0$, se $a < 0$.

2) Na reta $y = ax + b$, $a = tg\theta$, θ o ângulo a que se refere a observação anterior (quando

estivermos estudando Trigonometria comprovaremos este fato). Devido a essa relação com o ângulo θ, o número a é chamado de *coeficiente angular* da reta. O número b, denominado *coeficiente linear*, corresponde à ordenada do ponto de interseção da reta com o eixo y (quando $x = 0$, temos $y = b$). Em particular, vemos que o gráfico de uma função linear passa pela origem, pois, se $y = ax$, então $x = 0$ implica $y = 0$. Já com a função afim este fato não se verifica.

Figura 3.2-2



A equação do 1o grau, $ax + b = 0$, tem solução $\forall a, b \in$ R, $a \neq 0$. Assim, $\forall\, a \neq 0$, o gráfico da função $y = ax + b$ sempre intercepta o eixo x, pois, se $y = 0$, temos $0 = ax + b$, ou seja, $x = -b/a$, sendo este valor de *x* denominado zero da Função do 1° grau.

3.3 Variação do sinal

Se $y = f(x) = ax + b$, com $a > 0$, então

a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -b/a$,

b) $f(x) > 0 \Leftrightarrow ax + b > 0 \Leftrightarrow x > -b/a$, e

c) $f(x) < 0 \Leftrightarrow ax + b < 0 \Leftrightarrow x < -b/a$.

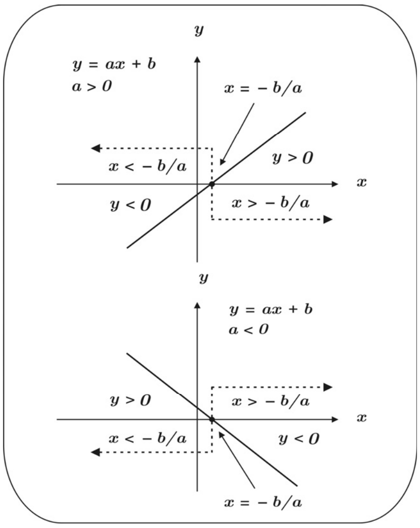


Figura 3.3-1

Na **Figura 3.3-1**, ao lado, registramos graficamente os resultados anteriores, considerando os casos $a > 0$ e $a < 0$.

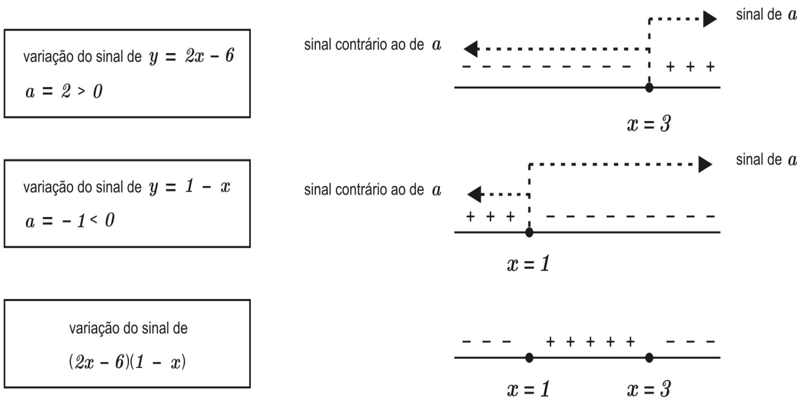
Vemos, portanto, que sendo $a > 0$, temos $y = ax + b > 0$, para $x > -b/a$, e $y = ax + b < 0$, para $x < -b/a$; e sendo $a < 0$, temos $y = ax + b < 0$, para $x > -b/a$, e $y = ax + b > 0$, para $x < -b/a$. Em síntese, dizemos que a Função do 1º grau $y = f(x) = ax + b$ possui o mesmo sinal de a, para x à direita de $-b/a$, e o sinal contrário ao de a, para x à esquerda de $-b/a$.

3.5 Inequações produto e quociente

Encerramos esta unidade com uma aplicação bastante útil da variação de sinal estudada na seção anterior. Nosso objetivo é estabelecer um método simples e eficaz para resolução de desigualdades que envolvem produtos e quocientes de polinômios do $1^{\underline{o}}$ grau. Faremos isto através de dois exemplos.

Exemplo 3.4-2

Vamos supor que estejamos interessados em obter o conjunto solução da inequação $(2x-6)(1-x) \geq 0$. Como o produto de dois fatores reais será maior do que ou igual a 0, se cada um deles for maior do que ou igual a 0, ou se cada um deles for menor do que ou igual 0, vemos que a solução de $(2x-6)(1-x) \geq 0$ depende, diretamente, do sinal de cada um dos termos envolvidos no produto. Registremos, então, em intervalos individualizados, a variação do sinal das funções $y_1 = 2x-6$ e $y_2 = 1-x = -x+1$, observando que a inequação admite como solução os valores de x para os quais $2x-6=0$ e $1-x=0$. Isto feito, resta-nos tão somente escrever o intervalo produto, com os resultados dos produtos dos sinais constantes nos intervalos anteriores. A solução da inequação corresponde à seção do intervalo produto cujo sinal coincide com o desejado pela desigualdade, ou seja, $1 \leq x \leq 3$.

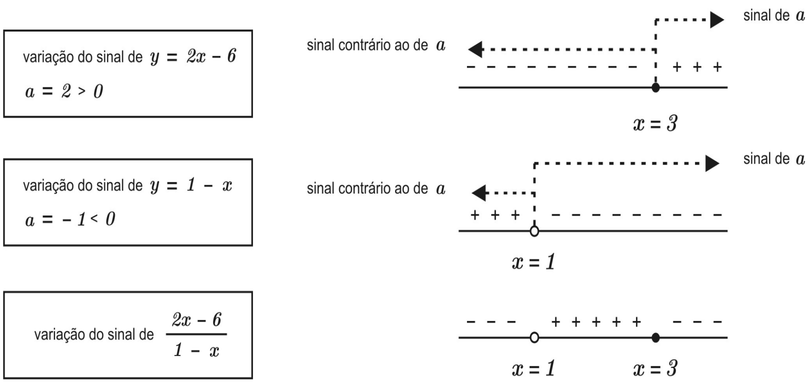


Exemplo 3.4-3

Consideremos agora a inequação

$$\frac{2x-6}{1-x} \leq 0.$$

Da mesma forma que um produto, um quociente também tem seu sinal dependendo diretamente do sinal de cada um dos termos (numerador e denominador) nele relacionados. No caso presente, para que tenhamos um quociente negativo ou nulo, seu numerador e seu denominador deverão apresentar sinais contrários, sendo admitida nulidade apenas no numerador, razão pela qual o ponto $x=1$ está identificado com uma bolinha sem preenchimento nos diagramas abaixo. Procedendo de modo análogo ao adotado no exemplo anterior, vamos concluir que a solução da inequação proposta é $x < 1$ ou $x \geq 3$, tendo em vista as variações de sinais apresentadas ao lado:



4. Avaliando o que foi construído

No Moodle...

Vá à plataforma MOODLE e dedique-se à resolução das tarefas relacionadas ao assunto desta unidade.
Saiba que o aprendizado em Matemática deve ser seqüencial, continuado e o sucesso no estudo das funções que virão pela frente depende dos conhecimentos adquiridos com a Função do 1º grau.

Dialogando e Construindo Conhecimento

Reúna-se com colegas para discutir temas estudados. Procure os Tutores para esclarecer algum tópico que não tenha sido bem assimilado. Comunique-se!
Nós estamos sempre dispostos a orientá-lo e ajudá-lo em caso de dificuldade no estudo da disciplina. Acredite em você e conte com conosco.

5. Referências

DANTE, Luiz R., Matemática: Contexto e Aplicações. Editora Ática, Vol. 1, 1a Edição, 1999.
IEZZI, G., Dolce, O., Hazzan, S., Fundamentos de Matemática Elementar, Vol. 1, Editora Atual, 8a Edição, 2004.
LIMA, Elon L., Carvalho, P.C.P., Wagner, E., A Matemática do Ensino Médio, Vol. 1, 2a Edição, Coleção Professor de Matemática, Publicação da Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

Unidade III Função do 2º grau

1. Situando a Temática

Por função polinomial entendemos uma regra de associação $y = f(x)$ expressa por uma equação da forma

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_o\,,$$

na qual os números reais a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, são os *coeficientes* e o número n, desde que se tenha $a_n \neq 0$, é um inteiro positivo chamado *grau*.

O enunciado acima nos faz reconhecer as funções focalizadas na **Unidade II** como *Funções Polinomiais de grau 1*. Naquela oportunidade, preferimos chamá-las de *Funções do 1º grau* por ser esta uma forma evidentemente mais singela e concisa de denominação. Agora, interessa-nos examinar o caso $n = 2$, que, pelas mesmas razões de simplicidade, corresponde à função que chamaremos de *Função do 2º grau*, mais conhecida como *Quadrática*.

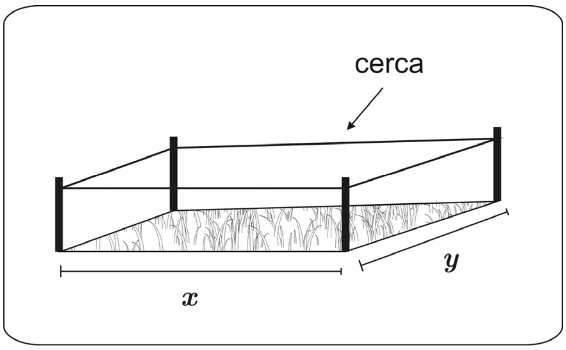
Nesta Unidade, examinaremos os principais elementos caracterizadores de uma função quadrática, estudaremos seu gráfico, uma parábola, e nele destacaremos a importância de um ponto muito especial: o vértice. Veremos ainda a variação do sinal desta função e seremos apresentados, logo de início, a um tipo de aplicação que lhe é bem particular: o cálculo otimizado de áreas de regiões retangulares. Vamos saber o que é isto?

2. Problematizando a Temática

Da mesma forma que as Funções do 1º grau, a Função do 2º grau pode ser utilizada como eficiente ferramenta de modelagem em diversas situações-problema, principalmente aquelas que possuem como objetivo a minimização ou a maximização de determinado componente variável. Vejamos um exemplo de uma situação dessa natureza.

Suponhamos que um fazendeiro possua 64m de cerca pré-fabricada em arame e deseje saber qual o maior retângulo que poderá cercar com o material de que dispõe. A **Figura 2-1** nos sugere resolver este problema através da busca das dimensões (base e altura) do retângulo de maior área, possível de ser cercado com 64m de arame.

Figura 2-1



Devemos, portanto, determinar o ponto (x, y) que maximiza a função "área de um retângulo de base x e altura y", levando em conta que o perímetro do retângulo deve ter a mesma medida que a quantidade total de cerca aramada possuída pelo fazendeiro.

Por conseqüência, o modelo matemático da situação se expressa nos seguintes termos: determinar o ponto de máximo do produto xy, considerando que $2x + 2y = 64$. Dessa última equação, extraímos

$$y = \frac{64 - 2x}{2} = 32 - x\,.$$

Levando este resultado até à fórmula da área, vemos que o problema a resolver resume-se em determinar o valor de x para o qual a função

$$f(x) = x(32 - x) = -x^2 + 32x\,.$$

assume seu maior valor. Em bem pouco tempo estaremos aptos a efetuar os cálculos necessários à obtenção da resposta a essa questão.

3. Conhecendo a Temática

3.1 Iniciando o estudo da função e da equação do 2º grau

Definição 3.1-1

Função do 2º grau, ou *Quadrática*, é toda função $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida pela fórmula $y = q(x) = ax^2 + bx + c$, onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Uma igualdade da forma $ax^2 + bx + c = 0$ é chamada de *Equação do 2º grau.*

A primeira parte da definição acima nos faz ver que a questão vivida pelo fazendeiro corresponde a um problema de maximização da função quadrática identificada por $a = -1$, $b = 32$ e $c = 0$.

Diferentemente da equação do 1º grau, a equação do 2º grau nem sempre possui solução no conjunto $\mathbb{R}$, já que a existência de raízes reais para a igualdade $ax^2 + bx + c = 0$ depende do sinal da expressão $\Delta = b^2 - 4ac$.

Com efeito, se $ax^2 + bx + c = 0$, então $ax^2 + bx = -c$, e multiplicando-se essa última equação por $4a$, ficamos com $4a(ax^2 + bx) = 4a(-c)$, isto é, $4a^2x^2 + 4abx = -4ac$.

Agora, adicionando-se b^2 a ambos os membros, temos a igualdade

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = -4ac + b^2,$$

ou

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac = \Delta.$$

Assim, $2ax + b = \pm\sqrt{\Delta}$, de onde vem

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad \textbf{(3.1-2)}$$

e, então, vemos que se $\Delta < 0$, não existirá $x \in \mathbb{R}$ satisfazendo $ax^2 + bx + c = 0$.

A igualdade **(3.1-2)** nos mostra, ainda, que sendo $\Delta = 0$, teremos apenas um número real como raiz da equação do 2º grau e sendo $\Delta > 0$, a equação $ax^2 + bx + c = 0$ será satisfeita por dois números reais distintos:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

3.2 Representação gráfica

O gráfico da função quadrática é denominado parábola. Podemos obter o seu esboço montando uma tabela de pontos (x, y), nos quais y resulta da substituição de valores aleatórios de x na equação $y = ax^2 + bx + c$, e registrando graficamente suas características, a partir das seguintes observações:

1) Como $a \neq 0$, podemos ter $a < 0$ ou $a > 0$. Se $a < 0$, a parábola caracteriza-se por apresentar concavidade voltada para baixo. Se $a > 0$, a concavidade volta-se para cima.

2) Tendo concavidade voltada para baixo, o vértice da parábola é o seu ponto de máximo. Tendo concavidade voltada para cima, o vértice é o ponto de mínimo. O vértice da parábola é o ponto de coordenadas $x = -b/2a$ e $y = -\Delta/4a$.

3) Toda parábola possui um *eixo de simetria* que a divide em dois ramos e contém seu vértice.

4) Como vimos, a interseção do gráfico de uma função qualquer com o eixo X é obtida fazendo-se $y = 0$ na fórmula $y = f(x)$. No caso da função quadrática, isso acarreta a necessidade de resolver a equação $q(x) = 0$, ou $ax^2 + bx + c = 0$.

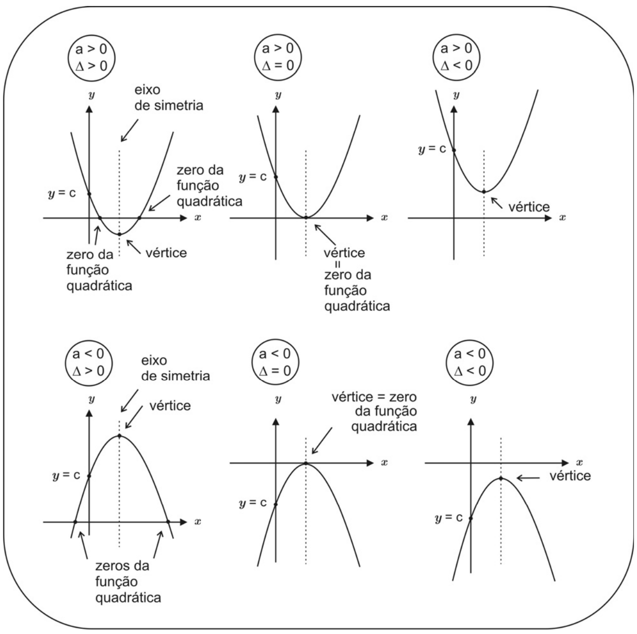
Com base no que aprendemos na seção anterior, concluímos agora que:

- $\Delta > 0$ implica no fato de a parábola cortar o eixo X em dois pontos que são os zeros da função quadrática,
- $\Delta = 0$ implica no fato de a função quadrática possuir um único zero e, conseqüentemente, a parábola tangenciar o eixo X nesse ponto, o qual coincide com seu vértice,
- $\Delta < 0$ implica no fato de a parábola não estabelecer qualquer contato com o eixo X.

5) A parábola sempre corta o eixo y no ponto $(0, c)$.

A **Figura 3.2-1**, a seguir, apresenta os seis tipos possíveis de parábolas, considerando-se as combinações de hipóteses relativas aos sinais de a e Δ.

Figura 3.2-1



3.3 Variação do sinal

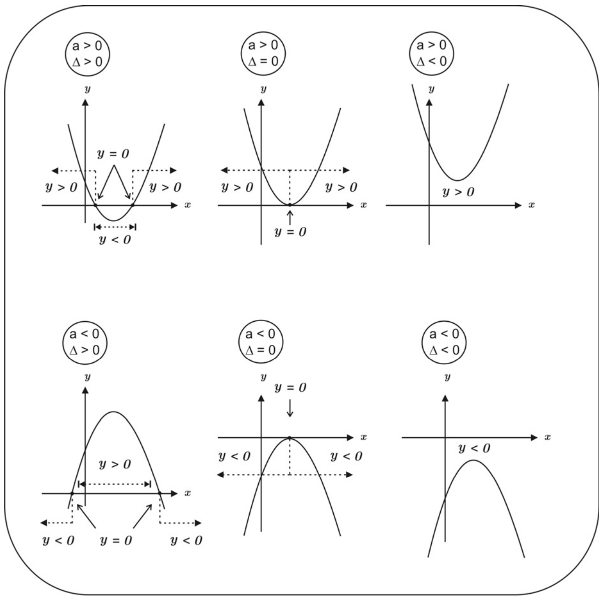
Como registra a **Figura 3.3-1**, independentemente de termos $a > 0$ ou $a < 0$, o sinal da função quadrática sofre uma variação relacionada à existência ou não de raízes para a equação do 2º grau correspondente. Assim:

1) $\Delta > 0$ significa que $y = ax^2 + bx + c$ se anula em seus zeros e possui o mesmo sinal de a para x à esquerda e à direita desses zeros, e o sinal contrário ao de a para x entre esses zeros.

2) $\Delta = 0$ significa que $y = ax^2 + bx + c$ se anula em seu único zero e possui o mesmo sinal de a para x à esquerda e à direita desse zero.

3) $\Delta > 0$ significa que $y = ax^2 + bx + c$ nunca se anula e possui o mesmo sinal de a para todo x em seu domínio.

Figura 3.3-1



Exemplo 3.3-2

Vamos utilizar a variação do sinal da função quadrática para determinar o domínio da função $q(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$. Como a fórmula que define essa função envolve uma raiz quadrada, logo uma raiz de índice par, sabemos (**Unidade I**, **Seção 3.6**) que existirão valores de $q(x)$, desde que x não provoque a negatividade do radicando. Por conseguinte, para determinarmos o domínio desejado, deveremos encontrar o conjunto solução da desigualdade $x^2 - 5x + 6 \geq 0$.

Chamando $y = x^2 - 5x + 6$, temos $a = 1 > 0$, $\Delta = 1 > 0$, sendo $x_1 = 2$ e $x_2 = 3$ os zeros dessa função quadrática. Assim, teremos $y = x^2 - 5x + 6 \geq 0$, para $x \leq 2$ ou $x \geq 3$. O domínio da função $q(x)$ é, portanto, o conjunto $\{ x \in \mathrm{R} \,/\, x \leq 2 \text{ ou } x \geq 3 \}$.

Exemplo 3.3-3

Agora temos condições de concluir a solução do problema do fazendeiro, proposto no início desta unidade.

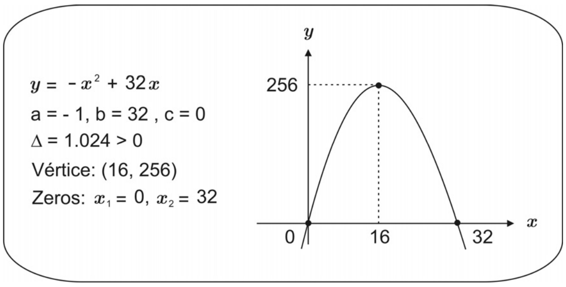
Como vimos, nossa tarefa era a de calcular o valor de x que maximiza a função

$$q(x) = x(32 - x) = -x^2 + 32x.$$

Pelo que já aprendemos, como $a = -1 < 0$, a função $q(x)$ possui, de fato, um ponto de máximo que é o vértice da parábola que corresponde à sua representação gráfica. Vamos, então, obter a abscissa desse vértice. No presente caso, a abscissa do vértice da parábola é dada por $x = -32/2.(-1) = 16$, de onde segue que para $x = 16$ a função $q(x) = -x^2 + 32x$ assume seu maior valor. A solução do problema será composta, portanto, desse valor para x e do valor de y que satisfizer a equação $2.16 + 2.y = 64$, ou seja, $y = 16$. Assim, concluímos que o fazendeiro, com 64m de cerca aramada, poderá cercar um quadrado de área igual a 256m^2.

O gráfico que segue exemplifica um procedimento sumário (utilizando apenas o vértice e os zeros) para esboço da parábola e mostra, geometricamente, porque 16 é o valor de x que corresponde à solução do problema.

Figura 3.3-4



OBS.: Note que o gráfico da **Figura 3.3-4** utiliza escalas diferentes para os eixos coordenados.

4. Avaliando o que foi construído

Finalizada a apresentação dos tópicos mais relevantes abrangendo a função quadrática, é importante que você ponha em teste o que estudou até agora e, também, amplie seus conhecimentos por meio de uma efetiva participação no desenvolvimento *on-line* da disciplina.

No Moodle...

Se você quiser saber, por exemplo, como a variação do sinal da função quadrática pode ser utilizada na resolução de inequações produto e quociente que envolvem trinômios do 2º grau, procure acompanhar as discussões e tarefas propostas na plataforma MOODLE sobre este e outros conteúdos relacionados.

Dialogando e Construindo Conhecimento

Leia, releia, pratique, discuta.

Nós estamos lhe acompanhando e apoiando. Conte conosco!

5. Referências

DANTE, Luiz R., Matemática: Contexto e Aplicações. Editora Ática, Vol. 1, 1a Edição, 1999.

IEZZI, G., Dolce, O., Hazzan, S., Fundamentos de Matemática Elementar, Vol. 1, Editora Atual, 8a Edição, 2004.

LIMA, Elon L., Carvalho, P.C.P., Wagner, E., A Matemática do Ensino Médio, Vol. 1, 2a Edição, Coleção Professor de Matemática, Publicação da Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

Unidade IV Revendo alguns conceitos e ampliando conhecimentos

1. Situando a Temática

Já conhecemos o conceito de função real de uma variável real e fomos apresentados a duas delas: Funções do 1º grau e Funções Quadráticas. Este conteúdo vai nos auxiliar no estudo referente a funções pares e ímpares e a funções crescentes e decrescentes, cujos conceitos serão agora introduzidos. Ele também proporcionará um novo enfoque para temas já abordados, cujo estudo preliminar foi desenvolvido sob a ótica da variável discreta.

2. Problematizando a Temática

A equação $y - x = 1$ permite que explicitemos a variável y em termos da variável x, obtendo $y = x + 1$. Dessa forma, dizemos que $y - x = 1$ define uma função do tipo $y = f(x)$. A equação $x^2 + y^2 = 1$ também permite que realizemos ação semelhante e, conseqüentemente, escrevamos $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$. Contudo, a questão que se coloca, neste caso, é: a igualdade $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ também exprime uma função do tipo $y = f(x)$?

O problema relativo à identificação de equações que, exprimindo y em termos de x, conseguem definir funções da forma $y = f(x)$ pode ser resolvido a partir de uma análise à luz da **Definição 3.1-1** (**Unidade I**). Muitas vezes, porém, tem-se a necessidade de fazer tal identificação com base na representação gráfica da curva expressa pela equação dada. É por este tipo de problema que iniciamos nossa revisão de conceitos.

Vamos responder à questão sobre a equação $x^2 + y^2 = 1$?

3. Desenvolvendo a Temática

3.1 Identificação gráfica de uma função

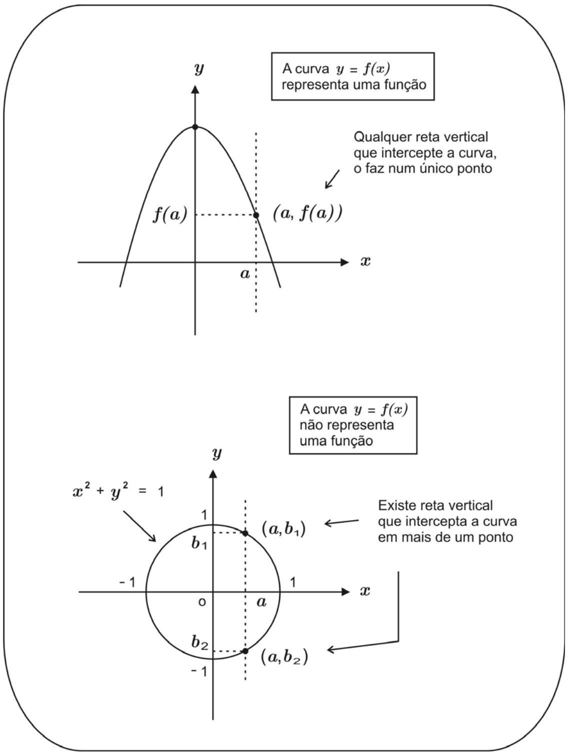
Como sabemos, uma regra $y = f(x)$ representa uma função, se a cada elemento x do domínio de f corresponder um único elemento y da sua imagem. Em particular, ***um elemento do domínio da função não pode estar associado a mais de um da imagem***. Considerando um caso concreto, explicitamos y em termos de x na equação $x^2 + y^2 = 1$, obtendo

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}\,.$$

Vemos que a fórmula acima faz sentido em $\mathbb{R}$, se $x \in [-1, 1]$, mas não define uma função do tipo $y = f(x)$ para x nesse intervalo, pois se tomarmos, por exemplo, $x = 0$, teremos $y = \pm 1$, ou, mais geralmente, se considerarmos qualquer valor de x, tal que $-1 < x < 1$, a este estarão associados dois valores de y do mesmo intervalo.

Uma interpretação geométrica desse fato corresponde à conclusão: "***existindo uma reta vertical que intercepte em mais de um ponto o gráfico de uma relação do tipo*** $y = f(x)$***, então esta não constitui uma função***". A figura que segue pretende esclarecer o raciocínio e o resultado.

Figura 3.1-1



Devemos observar que a figura geométrica denominada circunferência nos interessará mais de perto por ocasião dos estudos de Trigonometria, na **Unidade VI**. Por enquanto, aceitemos a afirmação de que a equação $x^2 + y^2 = 1$ corresponde graficamente a uma circunferência de centro na origem e raio unitário.

3.2 Identificação de funções injetoras

Através da **Definição 3.4-1** (**Unidade I**) ficamos sabendo que uma função f é injetora se $f(x_1) \neq f(x_2)$, sempre que se tenha $x_1 \neq x_2$ no domínio de f. Portanto, f não será injetora se existirem elementos distintos em seu domínio, apresentando imagens iguais, ou seja, se ocorrer $f(x_1) = f(x_2)$, com $x_1 \neq x_2$.

Desta forma, precisando verificar se uma função f é injetora, podemos supor $f(x_1) = f(x_2)$ e, desta equação, procurar determinar a possibilidade de ocorrência de $x_1 \neq x_2$. Se tal possibilidade existe, temos que f não é injetora. Caso contrário, ou seja, se, para quaisquer x_1 e x_2 no domínio de f, $f(x_1) = f(x_2)$ implicar, necessariamente, $x_1 = x_2$, então f é injetora.

Como ilustração, considere, inicialmente, a função $f(x) = 2x$. Supondo $f(x_1) = f(x_2)$, vem

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow 2x_1 = 2x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2,$$

o que nos faz ver que $f(x) = 2x$ é uma função injetora. Se, sob o mesmo aspecto, passarmos a analisar a função $f(x) = x^2$, com domínio abrangendo todo o conjunto $\mathbb{R}$, teremos

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1^2 = x_2^2 \Leftrightarrow x_1^2 - x_2^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ ou } x_1 = -x_2,$$

gerando a hipótese de ocorrência da igualdade $f(x_1) = f(x_2)$, quando $x_1 = -x_2$. Se, por exemplo, tomarmos $x_1 = 1$ e $x_2 = -1$, obteremos $f(x_1) = f(x_2) = 1$, resultado que acarreta na não injetividade da função quadrática $f(x) = x^2$. A tradução gráfica desse fato pode, então, ser colocada nos seguintes termos: existindo uma reta horizontal que intercepte em mais de um ponto o gráfico de uma função, esta não é injetora. A **Figura 3.2-1** resume estas caracterizações.

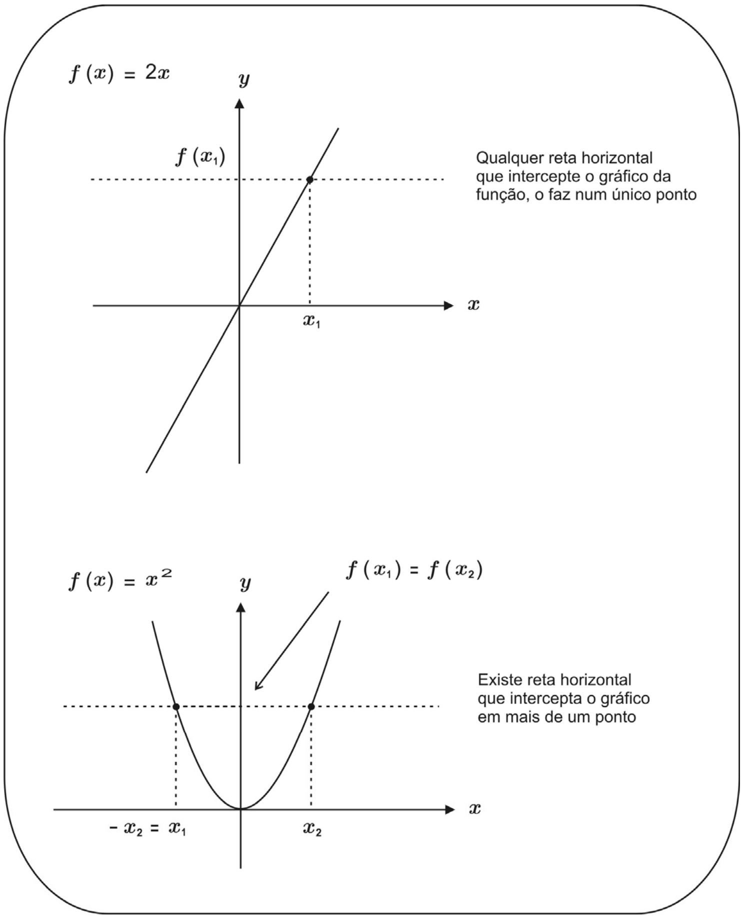


Figura 3.2-1

3.3 Funções pares e funções ímpares

Voltemos a considerar a função quadrática $f(x) = x^2$.

Tabela 1

A	B	C
x	$f(x)$	$f(-x)$
2	$2^2 = 4$	$(-2)^2 = 4$
$\sqrt{2}$	$\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$	$(-\sqrt{2})^2 = 2$
1	$1^2 = 1$	$(-1)^2 = 1$

As colunas **B** e **C** da **Tabela 1** nos mostram que $f(2) = f(-2)$, $f(\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2})$ e $f(1) = f(-1)$. Na verdade, se $f(x) = x^2$, a igualdade entre $f(x)$ e $f(-x)$ ocorre para todo número real x e não somente quando essa variável assume os valores acima especificados, já que $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

De um modo geral, se uma função f satisfaz tal propriedade, ou seja, se $f(-x) = f(x)$, para todos os valores de x no domínio de f, então dizemos que esta é uma *função par*. Observamos que esse fato acarreta a associação, através de f, de dois valores da variável x (um valor $x = a$ e seu simétrico aditivo $x = -a$) a um único valor da variável y, caracterizando, dessa forma, o gráfico de uma função par como uma curva constituída de partes simétricas em relação ao eixo y.

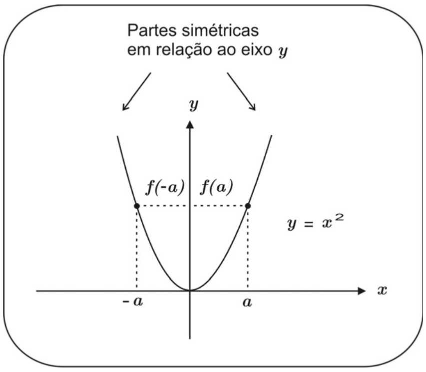


Figura 3.3-1

Por outro lado, tomando a função linear $f(x) = 2x$ e a **Tabela 2** que segue, concluímos que a igualdade $f(-x) = f(x)$ não mais se verifica.

Tabela 2

A	**B**	**C**	**D**
x	$f(x)$	$f(-x)$	$-f(x)$
2	$2.2 = 4$	$2.(-2) = -4$	-4
$\sqrt{2}$	$2.\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$	$2.(-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}$	$-2\sqrt{2}$
1	$2.1 = 2$	$2.(-1) = -2$	-2

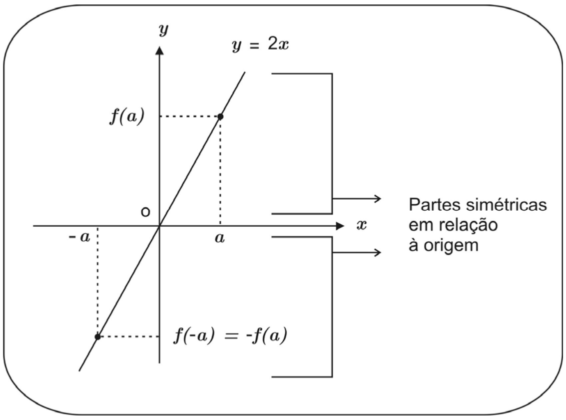


Figura 3.3-2

Desta feita, observamos que $f(-x) = -f(x)$, pelos resultados apresentados nas colunas **C** e **D**. Como $f(-x) = 2(-x) = -2x = -f(x)$, vemos, na verdade, que $f(-x) = -f(x)$, para todo valor real da variável x e não só para aqueles constantes da coluna A. Concluímos, assim, que $f(x) = 2x$ é uma função *ímpar*, pois recebe essa qualificação toda função que, em seu domínio, satisfaz a igualdade $f(-x) = -f(x)$. O fato de uma função ser ímpar acarreta uma representação gráfica composta por partes simétricas em relação à origem, como nos mostra a **Figura 3.3-2**.

3.4 Funções crescentes e funções decrescentes

Vamos agora estabelecer o conceito de crescimento e de decrescimento para funções. Para tanto, faremos uso, em princípio, da função afim $f(x) = x + 1$.

x	$f(x) = x + 1$
-3	-2
-2	-1
-1	0
0	1
1	2
2	3
3	4

Observando a tabela acima, verificamos que à medida que cresce o valor de x, $f(x)$ comporta-se da mesma forma. E este fato pode ser comprovado independentemente da atribuição de valores particulares para a variável x, pois

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 + 1 < x_2 + 1 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2),$$

logo, um aumento no valor de x (tomou-se x_2 maior do que x_1) acarretou um aumento no valor de $y = f(x)$ (obteve-se $f(x_2)$ maior do que $f(x_1)$). Este comportamento apresentado por $f(x) = x + 1$ concede-lhe a qualidade de função crescente. Formalizamos o conceito por meio da **Definição 3.4-1**.

Definição 3.4-1

Seja $f: A \to B$ uma função e consideremos x_1 e x_2 elementos quaisquer do conjunto A.

a) Se for verdade que $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$, então f é uma função *crescente*. Se para $x_1 < x_2$ tivermos $f(x_1) < f(x_2)$, então é comum classificar f de função *estritamente crescente*.

b) Se for verdade que $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$, então f é uma função *decrescente*. Não ocorrendo igualdade entre $f(x_1)$ e $f(x_2)$, então se enfatiza o decrescimento de f, classificando-a de *estritamente decrescente*.

Uma função que satisfizer qualquer uma das hipóteses anteriores é chamada de *monótona*, pois varia segundo um só "tom".

Com base na definição anterior, passamos a identificar $f(x) = x + 1$, quanto à análise de crescimento e decrescimento, como uma função *monótona estritamente crescente*. Tal propriedade também se revela graficamente.

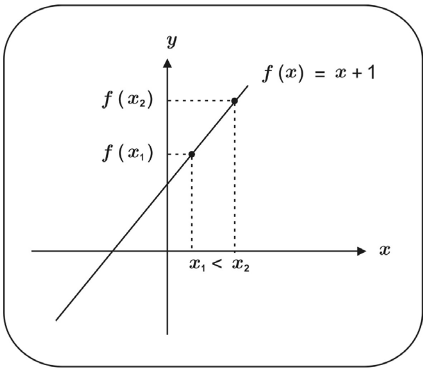


Figura 3.4-2

Por sua vez, $f(x) = -x + 2$, de acordo com a tabela abaixo, apresenta um comportamento de função *monótona estritamente decrescente*.

x	$f(x) = -x + 2$
-3	5
-2	4
-1	3

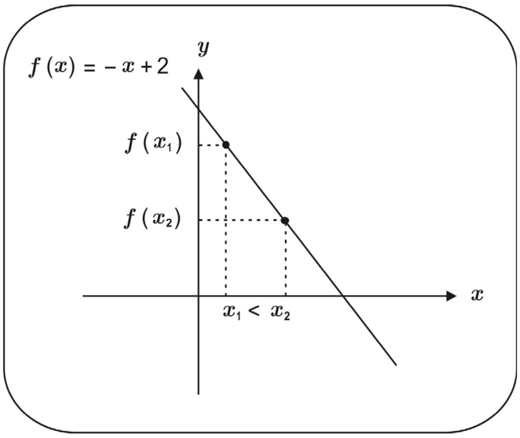
x	$f(x) = -x + 2$
0	2
1	1
2	0

Formalmente, temos

$$x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow -x_1 + 2 > -x_2 + 2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

A **Figura 3.4-3** expõe graficamente o decrescimento de $f(x) = -x + 2$.

Figura 3.4-3



No caso das funções do 1º grau, você pode comprovar (tente fazê-lo!) que

$$a > 0 \Rightarrow y = ax + b \text{ é estritamente crescente e}$$

$$a < 0 \Rightarrow y = ax + b \text{ é estritamente decrescente.}$$

Se agora analisarmos o que acontece com $f(x) = x^2$, definida em todo o conjunto $\mathbb{R}$, vamos nos deparar com uma função que não é monótona. Com efeito, se tomarmos, por exemplo, $x = -1$, que é menor do que zero, comparamos $f(-1)$ com $f(0)$ e obtemos $f(-1) = 1 > 0 = f(0)$, de onde já podemos concluir que f não é crescente.

Por outro lado, escolhendo $x = 1$, que é menor do que 2, comparamos $f(1)$ com $f(2)$ e obtemos $f(1) = 1 < 4 = f(2)$, demonstrando que f também não é decrescente. **Aceite o desafio e procure comprovar que** "a função $f(x) = x^2$ não é monótona porque, em relação ao crescimento e ao decrescimento, não mantém o mesmo comportamento ao longo de todo o conjunto dos números reais, crescendo se $x \geq 0$, e decrescendo se $x \leq 0$".

3.5 Bijetividade e inversão

Dedicamos a parte final deste capítulo a um reexame dos conceitos de bijetividade e inversão, utilizando, para tanto, funções definidas em intervalos. Como veremos, a tarefa passa a ser, em geral, mais complexa do que, por exemplo, a realizada com a função $f : A = \{0, 1, 2, 3\} \rightarrow B = \{0, 3, 6, 9\}$, dada por $f(x) = 3x$ (**Unidade I - Seção 3.4**).

Para começar, vamos estudar o comportamento da função afim $y = f(x) = 2x - 4$, considerando-a com domínio e contradomínio iguais a $\mathbb{R}$. Nossa tarefa resume-se, portanto, em responder às seguintes questões:

6) f é injetora?

7) f é sobrejetora?

8) Se as respostas às questões iniciais foram positivas, qual é a inversa de f?

Com relação à primeira pergunta, o conhecimento adquirido na **Seção 3.2** desta Unidade nos leva a responder que $f(x) = 2x - 4$ é uma função injetora, pois somos capazes de esboçar seu gráfico e observar que qualquer reta horizontal que o intercepte, o faz num único ponto. Sendo necessária uma comprovação analítica dessa resposta, apresentamos a seguinte justificativa formal, baseada na **Definição 3.4-1** (**Unidade I**):

"*Suponhamos que* x_1 *e* x_2 *sejam elementos no domínio de* $f(x) = 2x - 4$, *tais que* $f(x_1) = f(x_2)$ (Perceba que estamos supondo a existência de dois pontos do domínio com imagens iguais). *Daí, segue que*

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow 2x_1 - 4 = 2x_2 - 4 \Leftrightarrow 2x_1 = 2x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2,$$

significando que imagens iguais correspondem a elementos iguais no domínio, ou seja, não há, no domínio de f, *dois elementos distintos com imagens iguais* (Perceba que chegamos à conclusão de que os pontos do domínio também são iguais)".

Agora, observe que para responder à segunda questão, vamos precisar determinar a imagem da função $f(x) = 2x - 4$, o que podemos conseguir, descobrindo se para algum $y \in \mathbb{R}$, deixa de existir $x \in \mathbb{R}$, satisfazendo $y = f(x)$. Os pontos y em tal situação são os que não estão na imagem da função e, conseqüentemente, formam um conjunto Ω que satisfaz a relação $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} - \Omega$, onde $\mathrm{Im}(f)$ representa o conjunto imagem de f.

Estudemos, então, a equação $y = f(x)$ para saber se a mesma admitirá solução $x \in \mathbb{R}$, para qualquer y real. No caso da função com a qual estamos trabalhando, vemos que, independentemente do valor da variável y, a equação $y = 2x - 4$ sempre terá solução em x, dada por $x = (y + 4)/2$. Assim, Ω é um conjunto vazio e, por conseqüência, fica estabelecida a igualdade entre imagem e contradomínio de f, garantindo a sobrejetividade da função $f(x) = 2x - 4$, definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

Finalmente, segundo o exposto na Unidade I, temos que

$$\begin{aligned} f^{-1}&: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \to f^{-1}(x) = \frac{x+4}{2} \end{aligned}$$

é a inversa da função $f(x) = 2x - 4$.

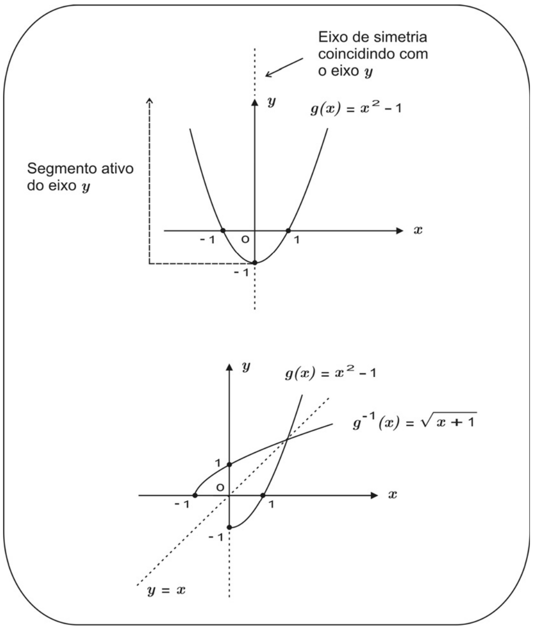
Para terminar, vamos dirigir as mesmas questões anteriores à função $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = x^2 - 1$. Agora, como o gráfico de g é uma parábola, observamos que a injetividade não mais se verifica. Nesse caso, podemos ainda justificar nossa resposta argumentando, por exemplo, que $g(-1) = 0$ e $g(1) = 0$, apesar de -1 e 1 serem distintos. Além disso, g também não é sobrejetora, pois a existência de solução, x, real para a equação $y = x^2 - 1$ depende de termos $y \geq -1$, pois

$$y = x^2 - 1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{y+1}$$

e $x = \pm\sqrt{y+1}$ é um número real, se $y + 1 \geq 0$, donde $y \geq -1$. Portanto, não há como falar de inversa para a função $g(x) = x^2 - 1$, considerando-a definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

Vamos então colocar a seguinte questão: *É possível modificar a função* $g(x) = x^2 - 1$ *de modo a torná-la bijetora e, conseqüentemente, invertível?*

Figura 3.5-1



Analisando atentamente o gráfico de $g(x) = x^2 - 1$ na parte superior da **Figura 3.5-1**, concluímos que sim, pois se considerarmos para domínio o intervalo $[0, +\infty)$, passaremos a ter em g uma função injetora, e se tomarmos para contradomínio o intervalo $[-1, +\infty)$, garantimos sua sobrejetividade. De fato, ficando a definição de g como

$$g : [0, +\infty) \to [-1, +\infty)$$
$$x \to g(x) = x^2 - 1$$

teremos

$$g(x_1) = g(x_2) \Leftrightarrow x_1^2 - 1 = x_2^2 - 1 \Leftrightarrow x_1^2 = x_2^2 \Leftrightarrow x_1 = x_2,$$

já que $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$, de onde segue a injetividade.

A garantia da sobrejetividade depende da existência de solução para a equação $y = x^2 - 1$. Mas, como vimos, essa equação admite solução em x, desde que tenhamos $y \geq -1$. Como o contradomínio de g é o intervalo $[-1, +\infty)$, tal exigência passa a ser satisfeita seja qual for o ponto x do domínio da função. A função inversa, neste caso, é dada por g^{-1}: $[-1, +\infty) \to [0, +\infty)$, onde $g^{-1}(x) = \sqrt{x + 1}$.

A parte inferior da **Figura 3.5-1** traz os gráficos de g, agora bijetora, e g^{-1}, salientando a simetria dos dois em relação à reta $y = x$, bissetriz dos quadrantes I e III. A “cirurgia plástica” à qual submetemos a função $g(x) = x^2 - 1$ com o intuito de torná-la invertível é comumente chamada de *restrição*, em virtude de havermos restringido seu domínio ao intervalo $[0, +\infty)$ e seu contradomínio ao intervalo $[-1, +\infty)$. É importante observar que sempre podemos redefinir uma função de modo a transformá-la numa função bijetora. Para tanto, devemos procurar analisar cuidadosamente sua representação gráfica, levando em conta a necessidade de satisfazer a sobrejetividade – o contradomínio deve coincidir com a imagem que, no gráfico, corresponde ao *segmento ativo* do eixo y – e a injetividade – qualquer reta horizontal que interceptar o gráfico, só poderá fazê-lo num único ponto. No caso da função quadrática, podemos resumir o trabalho acima descrito como a restrição da parábola a um de seus ramos, tomando como referência o eixo de simetria, como fizemos com $g(x) = x^2 - 1$.

4. Avaliando o que foi construído

Nesta Unidade IV você reviu alguns conceitos sob o enfoque de funções definidas com variáveis contínuas. Além disso, lhe apresentamos técnicas de identificação que se utilizam fortemente da representação gráfica de funções.

No Moodle...

A transformação de todo esse conteúdo em conhecimento só se dará com a sua participação efetiva nas atividades propostas no MOODLE. Portanto, programe-se. Planeje seus estudos. Já há muito o que estudar sobre funções.

5. Referências

DANTE, Luiz R., Matemática: Contexto e Aplicações. Editora Ática, Vol. 1, 1a Edição, 1999.

IEZZI, G., Dolce, O., Hazzan, S., Fundamentos de Matemática Elementar, Vol. 1, Editora Atual, 8a Edição, 2004.

LIMA, Elon L., Carvalho, P.C.P., Wagner, E., A Matemática do Ensino Médio, Vol. 1, 2a Edição, Coleção Professor de Matemática, Publicação da Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

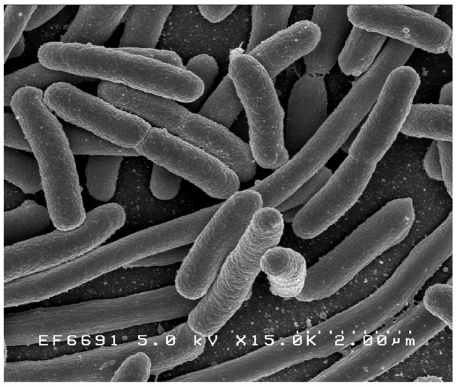
Unidade V Funções Exponencial e Logarítmica

1. Situando a Temática

Prever e medir crescimentos são tarefas com as quais, freqüentemente, defrontam-se técnicos e pesquisadores ligados à demografia, à economia e à biologia. Com relação a esta última área de conhecimento, muitos casos de reprodução celular são quantitativamente avaliados a partir de modelos elaborados com a utilização de uma função matemática muito especial: a exponencial. Esta função e sua inversa, a logarítmica, são os nossos objetos de estudo a partir de agora. Nesta unidade, as principais características e propriedades dessas funções serão evidenciadas e, posteriormente, aplicadas na resolução de equações e inequações. De início, porém, voltamos nossa atenção para o modelo matemático ao qual acabamos de nos referir. Esteja preparado para conhecer um fenômeno biológico que se processa de modo extremamente rápido. E dentro do seu próprio corpo.

2. Problematizando a Temática

As bactérias são os microorganismos unicelulares mais abundantes em nosso planeta. Dentre elas, a *Escherichia coli*, ou simplesmente *E. coli*, destaca-se como tema de estudo para médicos, biólogos e sanitaristas, possuindo tal denominação em homenagem ao médio austríaco Theodor Escherich, que a descobriu no fim do século XIX. Alguns tipos de *E. coli* constituem o grupo maligno dessa bactéria, responsável por grande número de intoxicações, inclusive alimentares, como a ocorrida em 2006, nos Estados Unidos, que provocou o fechamento temporário de nove restaurantes da rede Taco Bell. A *E. coli* possui forma semelhante a um pequeno bastão, tem comprimento médio de 1 micrômetro, ou a milésima parte do milímetro, e sua variante benigna habita o intestino humano e da maioria dos animais de sangue quente, ali agindo positivamente no processamento de alimentos.



Escherichia Coli: foto ao microscópio eletrônico
Disponível em www2.niaid.nih.gov/Biodefense/Public/Images.htm

Tabela 2-1

Tempo (em minutos)	População de bactérias Escherichia coli
0	100
20	200
40	400
(1 hora) 60	800
80	1600
100	3200
(2 horas) 120	6400
⋮	⋮
(8 horas) 480	1.677.721.600

A reprodução da bactéria *E. coli* dá-se por meio de fissão: a célula se divide ao meio, dando origem a duas. A taxa de repetição desse fenômeno depende de muitos fatores, dentre os quais se destacam temperatura e volume de nutrientes disponíveis. Se o nosso intestino fornecer as condições ideais para reprodução da *E. coli*, cada bactéria poderá duplicar-se de vinte em vinte minutos. Isto significa que se existir, originalmente, um grupo de 100 bactérias, passada a primeira hora, ou os 60 minutos iniciais, registraremos a existência de 800 bactérias. Em 2 horas, ou 120 minutos, elas serão 6.400. Em 8 horas, ou 480 minutos, constataremos que a população de bactérias *E. coli* já excede a marca de 1 bilhão de indivíduos, como nos mostra a **Tabela 2-1**.

Lembrando que $2^0=1$, vemos que todos os valores representativos do total acumulado de bactérias podem ser expressos como um produto da forma 100.2^x, sendo x o número de intervalos de tempo iguais a 20 minutos, já que $100 = 100.2^0$, $200 = 100.2^1$, $400 = 100.2^2$, $800 = 100.2^3$, $1.600 = 100.2^4$, $3.200 = 100.2^5$, etc.

Dessa forma, se representarmos por $f(x)$ o total acumulado de bactérias por x períodos de tempo, teremos o cálculo da população bacteriana sendo fornecido através da fórmula

$$f(x) = 100.2^x,$$

onde destacamos o fator 2^x como correspondente a uma função *exponencial*, cujo estudo iniciaremos na seção que segue.

Convém observar que a grandiosidade dos números relacionados à quantidade de bactérias *E. coli* residentes no intestino dos seres humanos não deve representar motivo de preocupação, já que essa espécie é satisfatoriamente controlada pelo nosso sistema imunológico. Além disso, deve-se considerar que cada pessoa expele, em média, um trilhão dessas bactérias todos os dias, através das fezes.

A grande maioria dos casos de doenças provocadas pela *E. coli* deve-se ao fato de a bactéria ser proveniente de outros indivíduos, sendo, portanto, de estirpe diferente daquela conhecida pelos nossos linfócitos. Por conseguinte, a melhor maneira de nos precavermos contra os males causados pela ingestão de bactérias *E. coli* estranhas ao nosso corpo é seguir, rigorosamente, normas básicas de higiene. Não podemos esquecer de lavar bastante as frutas e as verduras antes de comê-las. Se tomamos leite, este deverá ser pasteurizado. E devemos ainda ter todo o cuidado com a água que bebemos. Se gostamos de banhos de mar, piscina, lagos e rios, precisamos estar certos de que a água desses locais não se encontra contaminada com a bactéria. A quantidade de *E. coli* por mililitro define a principal medida de higiene da água. Esta medida é chamada de *índice coliforme*.

Por fim, vale a pena lembrar que bactérias *E. coli* estranhas ao nosso sistema imunológico, logo representativas de riscos à saúde, uma vez ingeridas, reproduzem-se em nosso intestino da mesma forma que as ali residentes. Portanto, atenção com a higiene! Você não vai querer usar a função $f(x) = 100.2^x$ para calcular, a cada vinte minutos, o número de inimigas que estão ocupando o seu intestino, vai?

3. Conhecendo a Temática

3.1 A função exponencial

Definição 3.1-1

A expressão $y = f(x) = a^x$ define uma função exponencial, para cada constante real positiva $a \neq 1$. Nessa expressão, o número a é a *base*, x é o *expoente* e y é a *potência*.

Por que a definição da função exponencial exige que a base seja positiva e diferente do número 1?

Devemos perceber que se a base a fosse um número negativo, poderíamos ter o y resultante da operação a^x excluído do conjunto dos números reais, como, por exemplo, no caso em que $a = -2$ e $x = 1/2$ (veja Propriedade 7., em **3.1.1**).

É claro que isso não significa que estejamos proibidos de efetuar cálculos com potências de base negativa ou nula. Desde o tempo em que iniciamos o estudo da potenciação, sabemos, por exemplo, que $(-2)^2 = 4$ e $0^4 = 0$, pois aprendemos que $k^n = k \times k \times \ldots \times k$, ou seja, k^n é o produto de n fatores iguais a k, para qualquer número inteiro e positivo n.

Além disso, se aceitássemos o valor unitário para a base a, ocorreriam, na função exponencial, incontáveis casos onde $x_1 \neq x_2$, mas $f(x_1) = f(x_2)$, como, de modo particular, constatamos em $1^2 = 1^3 = 1$. E não podemos permitir que problemas dessa natureza atinjam nossa função exponencial, pois a desejamos injetora. Como também a queremos sobrejetora, devemos tomar seu contradomínio como sendo o conjunto dos números reais estritamente positivos, ou $\mathbb{R}_+^*$, desde que $a^x = y > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, supondo $0 < a \neq 1$ (Em $\mathbb{R}_+^*$, o sinal $+$ representa a positividade dos elementos do conjunto e o $*$ diz que o zero não pertence a esse conjunto).

Dessa forma, respondemos à questão colocada no início desta seção, explicando que a função exponencial que nos interessa deve existir para todo x real e ser bijetora, logo invertível, razão pela qual a definimos escrevendo

$$\begin{aligned} f:\ & \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^* \\ & x \to y = f(x) = a^x,\ 0 < a \neq 1. \end{aligned}$$

3.1.1 Propriedades da Função Exponencial

A função exponencial é definida por uma fórmula que se expressa através de uma potenciação, razão pela qual consideramos importante rever as principais propriedades relacionadas a essa operação. Observe atentamente que, em alguns casos, as propriedades listadas podem impor determinadas condições para terem sua validade garantida.

1. $a^m a^n = a^{m+n}$, m, n e a números reais.
2. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, n e a números reais, com $a \neq 0$.
3. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, m, n e a números reais, com $a \neq 0$.
4. $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$, m, n e a números reais.
5. $\left(ab\right)^n = a^n b^n$, n, a e b números reais.
6. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$, n, a e b números reais, com $b \neq 0$.
7. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, se m, n e $\sqrt[n]{a^m}$ são números reais.

Considerando que a função exponencial adota como base números reais a satisfazendo $0 < a \neq 1$, concluímos que todas as propriedades acima podem ser utilizadas, a qualquer tempo, em nosso estudo.

3.1.2 Crescimento e decrescimento

Consideremos as funções $y = 2^x$ e $y = (1/2)^x$. A leitura da **Tabela 3.1.2-1**, que segue, demonstra o fantástico crescimento da primeira e o extraordinário decrescimento da segunda, fenômenos que podem ser generalizados, pois dependem exclusivamente da natureza da base. Perceba que sendo $0 < a \neq 1$, podemos ter funções exponenciais com bases no intervalo $(0, 1)$ ou no intervalo $(1, +\infty)$. Sempre que $0 < a < 1$, a função exponencial será decrescente e desde que tenhamos $a > 1$, ela será crescente. Logo, o que observamos em relação às funções citadas foram ocorrências particulares deste resultado.

Tabela 3.1.2-1

x	2^x	$(1/2)^x$
- 3	1/8	8
- 2	1/4	4
- 1	1/2	2
0	1	1
1	2	0.5
2	4	0.25
3	8	0,125
4	16	0,0625
5	32	0,03125
6	64	0,015625
7	128	0,0078125
8	256	0,00390625

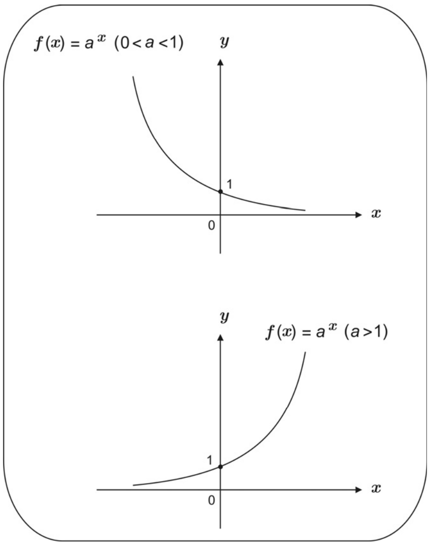
O crescimento de 2^x e o decrescimento de $(1/2)^x$ vão se tornando mais evidentes à medida que os valores da variável x aumentam. Se, por exemplo, considerarmos $x = 32$, um número real que, convenhamos, ainda está bem longe de ser considerado grande, verificamos que $2^x = 4.294.967.296$ enquanto $(1/2)^x \cong 0,00000000023$, sendo $\cong$ o símbolo indicativo de aproximação.

Note que, a partir de agora, você possui uma explicação matemática para o espantoso crescimento da população de bactérias *E. coli*.

3.1.3 Representação gráfica

A **Figura 3.1.3-1** expõe dois esboços de gráficos: um para a função $y = a^x$, considerando $0 < a < 1$, e outro para a mesma função, quando $a > 1$. Note como, em cada um deles, a função exponencial demonstra seu comportamento em relação ao aumento dos valores assumidos pela variável independente, x. Com base nos dados que constam na **Tabela 3.1.2-1**, você pode comprovar que esses esboços identificam-se com os gráficos das funções $y = (1/2)^x$ e $y = 2^x$, respectivamente.

Figura 3.1.3-1



Finalmente, alertamos para o fato de que, independentemente do intervalo em que esteja situada a base, $(0,1)$ ou $(1,+\infty)$, a curva $y = a^x$ não chega a tocar o eixo x, apesar de aproximar-se arbitrariamente deste em ambos os casos: quando x tende a $+\infty$, nos casos em que $0 < a < 1$, e quando x tende a $-\infty$, nas situações em que $a > 1$.

3.2 A função logarítmica

Como definimos a função exponencial sendo bijetora, pretendemos agora obter uma definição para a sua inversa. Claro que esta será uma função bijetora, com domínio em $\mathbb{R}_+^*$ e imagem em $\mathbb{R}$. A questão é: qual a fórmula que define a inversa de $y = a^x$?

Procedendo como em 1.4, da Unidade I, vemos que essa inversa será uma função g que a cada $y \in \mathbb{R}_+^*$ associa o único x real com a seguinte propriedade: dado um número real a, positivo e diferente da unidade, x é o expoente ao qual devemos elevar a para obter y, ou seja, $g(y) = x$, onde x é tal que $a^x = y$, para $0 < a \neq 1$.

Apesar de correta, a definição anterior não faz notável a inversa da exponencial, visto que não a estabelece através de fórmula específica. Na verdade, mantida tal definição, a inversa aqui tratada apresenta-se como função carente de uma identidade própria que a caracterize e, conseqüentemente, a distinga. Como solução para esse problema, o expoente x, ao ser utilizado na definição da inversa da exponencial, passa a receber a denominação especial de *logaritmo*, conforme a relação

$$a^x = y \iff x = log_a^{\,y}, \qquad \textbf{(3.2-1)}$$

ou seja, a igualdade $a^x = y$ acarreta "*x é o logaritmo de y na base a*", e reciprocamente.

Assim, redefinimos a inversa da função exponencial

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+^* \\ x &\to y = a^x, \quad 0 < a \neq 1 \end{aligned}$$

escrevendo

$$\begin{aligned} f^{-1}: \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R} \\ x &\to y = log_a^{\,x}, \quad 0 < a \neq 1. \end{aligned}$$

A partir de agora, sabemos o significado de um logaritmo: ele nada mais é que um expoente, calculado, sempre que possível, por meio da relação **(3.2-1)**.

Dessa forma, temos $log_2^{\,32} = 5$, porque $2^5 = 32$,

$log_3^{\,27} = 3$, porque $3^3 = 27$,

$log_a^{\,1} = 0$ e $log_a^{\,a} = 1$, para $0 < a \neq 1$.

Enquanto isso, log_5^{-5} não existe (como não existe o logaritmo de qualquer número real $x \leq 0$).

Na expressão $y = log_a^{\,x}$, y é o *logaritmo*, a é a *base* e x é *logaritmando*.

Observe que, sendo as funções exponencial e logarítmica inversas uma da outra, podemos escrever

$$a^{\log_a^x} = x \quad \text{e} \quad log_a^{\,a^x} = x. \qquad \textbf{(3.2-2)}$$

As equações acima são conseqüências imediatas do resultado obtido ao efetuar-se a composição de uma função com a sua inversa.

3.2.1 Propriedades do logaritmo

Para $m>0$, $n>0$ e $0<a\neq 1$, o logaritmo satisfaz

1. $log_a^{mn} = log_a^m + log_a^n$,
2. $log_a^{m^p} = p\,log_a^m$, p um número real qualquer,
3. $log_a^{m/n} = log_a^m - log_a^n$ e
4. $log_b^m = \dfrac{log_a^m}{log_a^b}$, com $0<b\neq 1$.

Demonstremos a validade da propriedade 4.

Se $x = log_b^m$, então, por **(3.2-1)**, $b^x = m$. Como sabemos que $b^x > 0$, temos $m>0$ e, assim, a partir desta última igualdade, podemos escrever $log_a^{b^x} = log_a^m$. Pela propriedade 2., vem que $x\,log_a^b = log_a^m$ e, assim, $x = \dfrac{log_a^m}{log_a^b}$, ou seja,

$$log_b^m = \frac{log_a^m}{log_a^b},$$

como queríamos.

As propriedades 1., 2. e 3. são, respectivamente, decorrências imediatas das propriedades 1., 4. e 3., apresentadas para a potenciação em **3.1.1**. A propriedade 4., recém-provada, corresponde a uma fórmula de conversão denominada "mudança de base", pois sua utilização se dá sempre que necessitamos calcular o valor do logaritmo de um determinado $m>0$, numa base b, $0<b\neq 1$, conhecidos os logaritmos de m e b em uma certa base a, $0<a\neq 1$.

3.2.2 Representação gráfica

Sabemos que as funções logarítmica e exponencial, sendo inversas uma da outra, devem ter seus gráficos simétricos em relação à reta $y=x$. Dessa forma, utilizando o conteúdo da Figura 3.1.3-1, apresentamos, na Figura 3.2.2-1, o gráfico de $y = log_a^x$ quando $0<a<1$ e quando $a>1$. A partir destes gráficos, podemos verificar que a função logarítmica tem o mesmo comportamento que a exponencial quanto ao crescimento e ao decrescimento: $f(x) = \log_a^x$ cresce quando $a>1$, e decresce quando $0<a<1$.

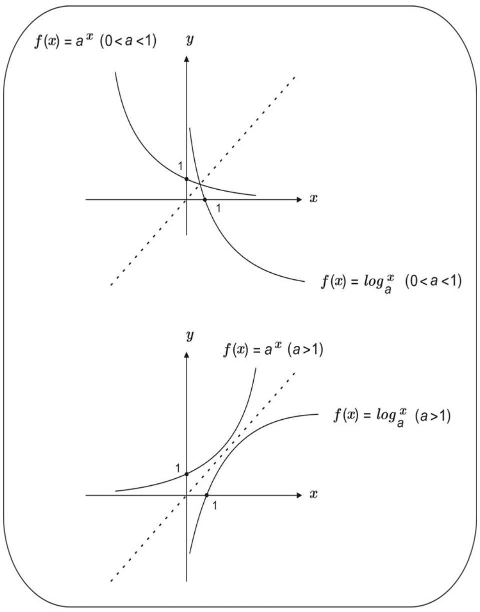


Figura 3.2.2-1

3.3 Equações e inequações exponenciais

Identificamos uma equação exponencial pela presença da incógnita em expoentes. Para esse tipo de equação, dois procedimentos são comumente adotados na tentativa de resolução: a) redução a uma base única e b) aplicação do logaritmo. O primeiro objetiva trabalhar a equação até reduzi-la a uma igualdade entre potências de mesma base. Daí, tendo em vista a injetividade da função $f(x) = a^x$, a igualdade $a^x = a^z$ nos permitirá concluir que $x = z$, de onde chegaremos ao(s) valor(es) de x procurado(s). Não sendo possível efetuar a redução prevista no método anterior, procuramos determinar a solução da equação transformando-a em uma igualdade do tipo $a^x = z$ para, então, utilizar a relação **(3.2-1)**. Vejamos exemplos de aplicações desses métodos.

Exemplo 3.3-1

A equação $4^{3x-5} - 16 = 0$ é redutível a uma igualdade entre potências de uma mesma base, pois

$$4^{3x-5} - 16 = 0 \Leftrightarrow 4^{3x-5} = 16 \Leftrightarrow 4^{3x-5} = 4^2.$$

De $4^{3x-5} = 4^2$, concluímos que $3x - 5 = 2$, ou seja, que $x = \dfrac{7}{3}$.

Exemplo 3.3-2

A equação $3^{x+2} + \dfrac{9}{3^x} = 18$ pode ser escrita como $3^x.3^2 + \dfrac{9}{3^x} = 18$. Fazendo $3^x = y$, ficamos com $9y + \dfrac{9}{y} = 18$, de onde, pela multiplicação de toda a equação por y, segue que $9y^2 - 18y + 9 = 0$. Assim, temos $y^2 - 2y + 1 = 0$ e, conseqüentemente, $y = 1$. Como fizemos $3^x = y$, concluímos que $x = 0$, pois $3^x = 1 \Leftrightarrow 3^x = 3^0$.

Exemplo 3.3-3

Como não podemos escrever o número 13 em forma de potência de base 2, ou de base 4, a igualdade $4^{x+1} = 13$, combinada com a relação **(3.2-1)**, nos faz deduzir que $x + 1 = log_4^{13}$ e, portanto, que $x = log_4^{13} - 1$.

Normalmente, as nossas calculadoras científicas nos fornecem o valor do logaritmo de um número real positivo na base 10, através da tecla identificada por *log*, e na base e, caso do logaritmo denominado *natural*, por meio da tecla *ln* (*Você vai conhecer mais de perto este tipo especial de logaritmo através do* MOODLE). Dessa forma, fazendo uso da propriedade de mudança de base, podemos escrever

$$x = log_4^{13} - 1 \Leftrightarrow x = \frac{log_{10}^{13}}{log_{10}^{4}} - 1,$$

para, então, concluirmos que $x \cong \dfrac{1{,}114}{0{,}602} - 1 \cong 1{,}850 - 1 = 0{,}850$, onde $1{,}114$ e $0{,}602$ são aproximações para log_{10}^{13} e log_{10}^{4}, respectivamente, obtidas em uma calculadora.

Se, em vez de uma equação, tivermos uma inequação ou desigualdade de natureza exponencial, para sua resolução deveremos levar em conta que as funções exponencial e logarítmica são crescentes, se $a > 1$, e decrescentes, se $0 < a < 1$. Este fato merece ser destacado sob a forma de dois resultados:
quando $a > 1$, temos

$$a^x \le a^z \iff x \le z \qquad \textbf{(3.3-4a)}$$

e

$$log_a^{\,x} \le log_a^{\,z} \iff x \le z\,; \qquad \textbf{(3.3-4b)}$$

quando $0 < a < 1$, temos

$$a^x \le a^z \iff x \ge z \qquad \textbf{(3.3-5a)}$$

e

$$log_a^{\,x} \le log_a^{\,z} \iff x \ge z\,. \qquad \textbf{(3.3-5b)}$$

Os métodos de solução de inequações exponenciais, como mostram os exemplos seguintes, possuem os mesmos fundamentos que os utilizados para as equações: tentativa de redução dos termos a potências de mesma base e, alternativamente, utilização da função logarítmica.

Exemplo 3.3-6

Vejamos um procedimento para resolução da inequação $4^x - 6.2^x + 8 < 0$. Como $4^x = \left(2^2\right)^x = 2^{2x} = \left(2^x\right)^2$ (*Qual propriedade, em* **3.1.1**, *nos assegura a veracidade dessa conclusão?*), fazendo $2^x = y$, escrevemos a inequação $4^x - 6.2^x + 8 < 0$ como $y^2 - 6y + 8 < 0$, de onde obtemos $2 < y < 4$ (*Agora é hora de lembrar do estudo da variação do sinal da função quadrática, feito na* ***Unidade III***). Mas $2 < y < 4 \iff 2^1 < 2^x < 2^2 \iff 1 < x < 2$, por **(3.3-4a)**, e nossa inequação está resolvida.

Exemplo 3.3-7

Se quisermos determinar os valores de x para os quais $5^x < 11$, poderemos aplicar a função logarítmica de base 10 em ambos os membros dessa desigualdade e, levando em conta o que estabelece **(3.3-4b)**, concluir que $log_{10}^{\,5^x} < log_{10}^{\,11}$. Daqui, obtemos $x\,log_{10}^{\,5} < log_{10}^{\,11}$ e, como $log_{10}^{\,5} > 0$, podemos escrever $x < \dfrac{log_{10}^{\,11}}{log_{10}^{\,5}} \cong \dfrac{0{,}699}{1{,}041} \cong 0{,}671$.

3.4 Equações e inequações logarítmicas

Uma equação é chamada de logarítmica, se envolve pelo menos um logaritmo em que uma incógnita encontra-se presente no logaritmando e/ou na base.

A resolução de uma equação logarítmica tem início com o estabelecimento do campo de valores da variável x que poderão ser admitidos como soluções (*condição de existência*), posto que $log_a^{\,x}$ existe, se, e somente, se, $x > 0$ e $0 < a \ne 1$. A partir daí, procura-se reduzir a equação a uma igualdade entre dois logaritmos de mesma base para, então, obter-se seu conjunto solução em razão da injetividade da função logarítmica.

O exemplo abaixo pretende facilitar a compreensão do método.

Exemplo 3.4-1

$log_2^{(x+3)}$ existe, se $x + 3 > 0$, ou seja, se $x > -3$. Por sua vez, $log_2^{(x-3)}$ existe, se $x - 3 > 0$, ou seja, se $x > 3$. Assim, esses logaritmos existirão simultaneamente, desde que $x > 3$. Portanto, $x > 3$ corresponde a uma pré-condição de existência de solução para a equação

$$log_2^{(x+3)} + log_2^{(x-3)} = 4\,.$$

Aplicando o método exposto anteriormente, temos

$$log_{2}^{(x+3)} + log_{2}^{(x-3)} = 4 \Leftrightarrow log_{2}^{(x+3)(x-3)} = log_{2}^{16} \Leftrightarrow (x+3)(x-3) = 16$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 9 = 16 \Leftrightarrow x^2 = 25 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{25} = \pm 5.$$

Tendo em vista a condição de existência, despreza-se o valor $x = -5$ e fica-se com $x = 5$ como única solução da equação dada.

Quando temos uma desigualdade envolvendo logaritmos, estabelecida a condição de existência, procuramos, como no caso das equações, reduzir o problema a uma desigualdade entre dois logaritmos de mesma base e, então, procedemos de modo semelhante àquele adotado quando do estudo das inequações exponenciais, no que se refere ao sinal da desigualdade, isto porque as funções exponencial e logarítmica, como vimos, apresentam o mesmo comportamento quanto ao crescimento e ao decrescimento. Analisemos um exemplo.

Exemplo 3.4-2

A desigualdade $log_{5}^{(2x-1)} < 0$ equivale a $log_{5}^{(2x-1)} < log_{5}^{1}$, de onde concluímos que $2x - 1 < 1$, ou $x < 1$, pois a função $y = log_{5}^{x}$ é crescente. Mas $x < 1$ é, realmente, a solução da inequação $log_{5}^{(2x-1)} < 0$? Se $x = 0$, por exemplo, $log_{5}^{(2x-1)} < 0$ transforma-se em $log_{5}^{-1} < 0$ e log_{5}^{-1} não está definido. Isto vem mostrar que $x < 1$ não é a solução procurada.

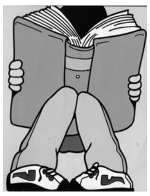
Na verdade, toda essa confusão é fruto da ausência de uma condição de existência para $log_{5}^{(2x-1)}$, único logaritmo envolvido no problema. Essa condição vem exigir que qualquer solução de $log_{5}^{(2x-1)} < 0$ deve satisfazer $x > 1/2$, pois $2x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1/2$. Portanto, a solução da inequação apresentada não é $x < 1$, mas, sim, $1/2 < x < 1$, em razão da necessidade de serem satisfeitas ambas as desigualdades: $x > 1/2$ e $x < 1$.

4. Avaliando o que foi construído

No Moodle...

Na plataforma MOODLE, no espaço reservado à disciplina Matemática para o Ensino Básico II, você poderá testar seus conhecimentos a respeito das funções exponencial e logarítmica. Nos encontraremos no MOODLE. Até lá!

Ampliando o seu Conhecimento



Amplie sua visão acerca do assunto, principalmente no que diz respeito a aplicações envolvendo o logaritmo natural, aspecto que não foi contemplado neste caderno. No MOODLE, você também verá outras aplicações da exponencial que, certamente, amenizarão o impacto do susto causado pela reprodução das bactérias *E. coli*. Você já havia esquecido delas?

5. Referências

DANTE, Luiz R., Matemática: Contexto e Aplicações. Editora Ática, Vol. 1, 1a Edição, 1999.

IEZZI, G., Dolce, O., Murakami, C., Fundamentos de Matemática Elementar, Vol. 2, Editora Atual, 8a Edição, 2004.

LIMA, Elon L., Carvalho, P.C.P., Wagner, E., A Matemática do Ensino Médio, Vol. 1, 2a Edição, Coleção Professor de Matemática, Publicação da Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

Unidade VI Funções Trigonométricas

1. Situando a Temática

Não sendo possível utilizar um instrumento adequado de medição, para conhecermos a distância que separa dois pontos, precisamos nos deslocar entre eles e, então, aferir a extensão da trajetória percorrida. Isto, porém, se esse nosso deslocamento for viável. Em muitos casos, deslocar-se de um ponto a outro pode constituir tarefa praticamente impossível de ser realizada, em razão da inexistência de meios de locomoção ou em virtude de um consumo excessivo de tempo e recursos, como seria o caso de avaliarmos a distância entre dois pontos no oceano ou no espaço.

Fazer uso de um triângulo é certamente um ótimo procedimento para resolver o problema do cálculo de distâncias quando métodos comuns de mensuração não podem ser aplicados. Esta técnica e outros importantes conhecimentos nós vamos adquirir com o estudo da Trigonometria, parte da Matemática que podemos resumir como responsável pelo estabelecimento das relações entre lados e ângulos de um triângulo, conceito que se justifica em razão da palavra *trigonometria*: união dos vocábulos gregos ***tri*** (três), ***gono*** (ângulo) e ***metrien*** (medida).

Os conteúdos da Trigonometria que iremos desenvolver, mesmo em nível elementar, são o alicerce teórico de resultados aplicados continuamente nas navegações terrestre, marítima e aérea, sendo igualmente utilizados na geografia, em trabalhos de cartografia, e especialmente importantes para a astronomia.

2. Problematizando a Temática

Como dissemos, uma relevante aplicação da trigonometria se dá quando necessitamos avaliar distâncias. Por essa razão, consideremos a situação caracterizada por um pássaro que, pousado em seu ninho, construído no alto de um poste de 20m de altura, avista seu filhote bicando o chão, perigosamente afastado dos pais. Supondo que o pássaro (mãe) partiu em direção ao filho num vôo cuja inclinação foi de 60° (lê-se *sessenta graus*) em relação ao poste, qual a distância que separava mãe e filho naquele momento?

Veremos, em breve, que o problema proposto acima é bem simples de ser resolvido, bastando, para tanto, conhecermos o valor assumido por certa função trigonométrica quando seu argumento coincide com o ângulo fornecido.

Vamos, então, iniciar o nosso estudo da Trigonometria para termos condição de solucionar esta e muitas outras questões.

3. Conhecendo a Temática

3.1 Medindo arcos e ângulos

Um ***ângulo*** é obtido pela união de dois segmentos retilíneos com um ponto final comum denominado ***vértice***. Estes segmentos, também chamados de ***raios***, são os lados do ângulo. Neste nosso estudo, usaremos letras gregas minúsculas, como α, β e θ, para representar ângulos (**Figura 3.1-1a**).

Se a partir de um ângulo θ, com centro no vértice *O*, traçarmos uma circunferência que intercepte os lados de θ, estes passam a determinar, nessa circunferência, dois pontos que definem um ***arco***, tendo θ como ***ângulo central*** (**Figura 3.1-1b**).

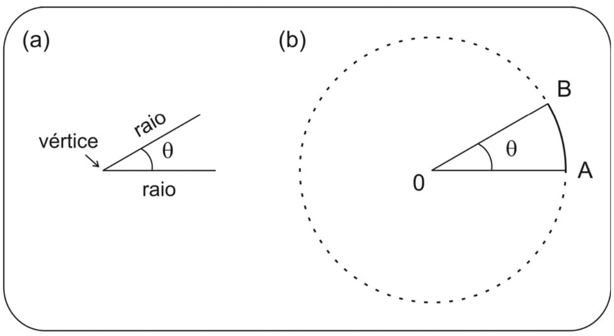


Figura 3.1-1

Iniciaremos, em seguida, a apresentação das duas unidades de medida mais utilizadas para ângulos: o *grau* e o *radiano*.

3.1.1 A unidade de medida grau

Dividindo-se a circunferência em 360 arcos iguais, a medida de cada arco chamar-se-á ***um grau***, representado por 1°. Convenciona-se que as unidades de medida de arcos e ângulos recebem iguais denominações. Portanto, a um arco de 45°, por exemplo, corresponde um ângulo central de 45°. Evidentemente, o arco, ou ângulo, de uma rotação completa na circunferência mede 360° e o arco, ou ângulo, nulo mede 0°.

Cada grau pode ser dividido em 60 partes iguais, chamadas ***minutos***. Cada minuto, por sua vez, divide-se em 60 ***segundos***. Dessa forma, temos $1^\circ = 60'$ ($60'$ lê-se *sessenta minutos*), ou seja, um grau é o mesmo que sessenta minutos, e 1' = 60" (60" lê-se *sessenta segundos*), ou seja, um minuto é o mesmo que sessenta segundos. Hoje em dia esta subdivisão do grau em minutos e segundos já não é tão utilizada. É comum encontrarmos, por exemplo, um ângulo de *sete graus e trinta minutos* sendo representado por $7{,}5^\circ$ e não por $7^\circ 30'$.

3.1.2 A unidade de medida radiano

Consideremos agora uma circunferência de centro O, cujo raio mede r unidades de comprimento. Se os lados de um ângulo central θ determinam na circunferência um arco de comprimento r, dizemos que θ mede ***um radiano***, ou seja, $\theta = 1rad$ ($1rad$ lê-se um radiano) (**Figura 3.1.2-1**).

Por força desta definição, escrevemos

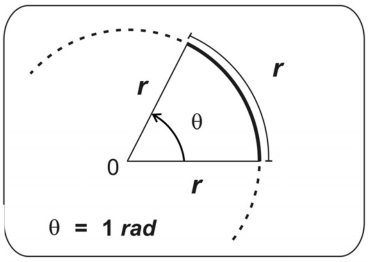


Figura 3.1.2-1

$$\text{medida de } \theta \text{ em radianos} = \frac{\text{comprimento do arco que possui } \theta \text{ como ângulo central}}{\text{comprimento do raio da circunferência}}$$

Devemos observar que ângulos são classificados como *positivos* e *negativos*, de acordo com o sentido da rotação que os gera. Consideraremos *negativo* todo ângulo gerado por uma rotação realizada no *sentido do movimento dos ponteiros do relógio*. Caso contrário, ou seja, sendo gerado por uma rotação que se processou no *sentido contrário ao do movimento dos ponteiros do relógio*, o ângulo será considerado *positivo* (Veja a **Figura 3.1.2-2**).

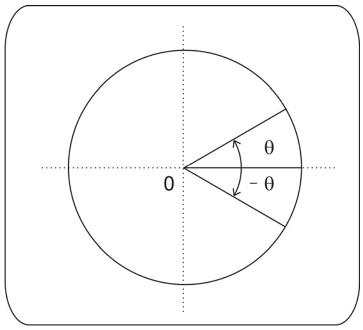


Figura 3.1.2-2

3.1.3 Convertendo unidades

Para estabelecermos a medida de um ângulo em radianos, conhecida sua medida em graus, ou o contrário, basta notar que o arco correspondente a uma rotação completa na circunferência tem comprimento igual a $2\pi r$ e, assim, sendo θ o ângulo central desse arco, temos $\theta = 360^\circ$, o que, pela fórmula acima, nos dá

$$\textit{medida de } \theta \textit{ em radianos} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \, .$$

Logo, $360^\circ = 2\pi\, rad$, ou seja, $360.1^\circ = 2\pi\, rad$, de onde segue que

$$1^\circ = \frac{\pi}{180}\, rad \qquad (\mathbf{3.1.3\text{-}1})$$

e

$$1\, rad = \frac{180}{\pi}.1^\circ \qquad (\mathbf{3.1.3\text{-}2})$$

Portanto, se quisermos saber quanto mede em radianos o ângulo de 60°, utilizamos (**3.1.3-1**) e vemos que $60^\circ = 60.1^\circ = 60.\frac{\pi}{180}\, rad = \frac{\pi}{3}\, rad$. Por sua vez, (**3.1.3-2**) nos diz que $\frac{\pi}{2} rad = 90^\circ$, pois

$$\frac{\pi}{2}.1\, rad = \frac{\pi}{2}.\frac{180}{\pi}.1^\circ = \frac{180}{2}.1^\circ = 90.1^\circ = 90^\circ \, .$$

3.2 Razões trigonométricas em um triângulo retângulo

Vejamos, inicialmente, algumas definições e resultados que nos permitirão estabelecer seis razões trigonométricas primordiais.

Um *triângulo retângulo* (**Figura 3.2-1**) é um polígono de três lados com um dos ângulos internos medindo 90°. Num triângulo retângulo, os dois lados adjacentes ao ângulo de 90°, chamado de *reto* e representado por $\rceil$, são os *catetos* e o lado oposto a esse ângulo é a *hipotenusa*.

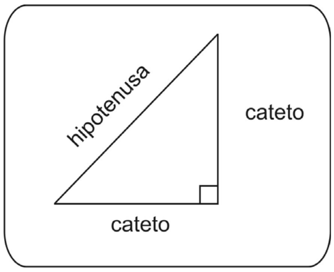


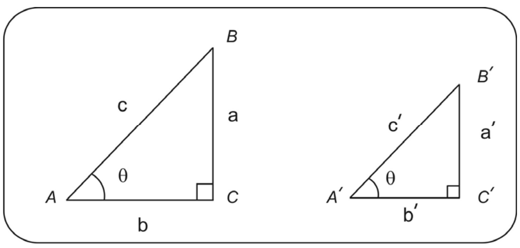
Figura 3.2-1

Na Geometria Plana aprendemos que dois triângulos quaisquer são *semelhantes*, se seus ângulos correspondentes são iguais e, por conseqüência, que dois triângulos retângulos são semelhantes, se possuem ângulos agudos iguais (*agudo* é o ângulo que tem medida superior a 0° e inferior a 90°). Além disso, os lados correspondentes de dois triângulos semelhantes são proporcionais (*consulte seu Professor de Matemática para o Ensino Básico I a respeito destes resultados*).

Supondo, então, que os triângulos retângulos determinados pelos pontos ABC e A’B’C’ (**Figura 3.2-2**) são semelhantes, podemos escrever $a = k\,a'$, $b = k\,b'$ e $c = k\,c'$, onde k é a constante de proporcionalidade, para concluir que

$$\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'},\ \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'},\ \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'},\ \frac{b}{a} = \frac{b'}{a'},\ \frac{c}{b} = \frac{c'}{b'} \text{ e } \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'} . \qquad (\mathbf{3.2\text{-}3})$$

Figura 3.2-2



As seis razões entre os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo expressas em (**3.2-3**) estão relacionadas, apenas, à medida do ângulo agudo θ, oposto aos catetos a e a'. Em particular,

a. a razão entre o cateto oposto a θ e a hipotenusa terá o valor constante $\dfrac{a}{c} = \dfrac{a'}{c'}$, que chamaremos de *seno* do ângulo θ e denotaremos por $sen\,\theta$,

b. a razão entre o cateto adjacente a θ e a hipotenusa terá o valor constante $\dfrac{b}{c} = \dfrac{b'}{c'}$, que chamaremos de *cosseno* do ângulo θ e denotaremos por $cos\,\theta$,

c. a razão entre os catetos oposto e adjacente a θ terá o valor constante $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a'}{b'}$, que chamaremos de *tangente* do ângulo θ e denotaremos por $tg\,\theta$,

d. a razão entre os catetos adjacente e oposto a θ terá o valor constante $\dfrac{b}{a} = \dfrac{b'}{a'}$, que chamaremos de *cotangente* do ângulo θ e denotaremos por $cotg\,\theta$,

e. a razão entre a hipotenusa e o cateto adjacente a θ terá o valor constante $\dfrac{c}{b} = \dfrac{c'}{b'}$, que chamaremos de *secante* do ângulo θ e denotaremos por $sec\,\theta$, e, finalmente,

f. a razão entre a hipotenusa e o cateto oposto a θ terá o valor constante $\dfrac{c}{a} = \dfrac{c'}{a'}$, que chamaremos de *cossecante* do ângulo θ e denotaremos por $cossec\,\theta$.

Estabelecidas as razões acima, podemos, a partir delas, deduzir três importantes resultados. Inicialmente, voltando a considerar o triângulo ABC, vemos que

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = 1,$$

pois $a^2 + b^2 = c^2$, pelo Teorema de Pitágoras.

Mas

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

equivale a

$$\boxed{sen^2\theta + cos^2\theta = 1} \qquad \textbf{(3.2-5)}$$

que chamaremos de *Primeira Identidade Fundamental da Trigonometria*.

Dividindo todos os termos de (**3.2-5**) por $cos^2\theta$, ficamos com

$$\frac{sen^2\theta}{cos^2\theta} + \frac{cos^2\theta}{cos^2\theta} = \frac{1}{cos^2\theta},$$

de onde vem a igualdade

$$\boxed{tg^2\theta + 1 = sec^2\theta} \qquad \textbf{(3.2-6)}$$

que será chamada de *Segunda Identidade Fundamental da Trigonometria*.

Finalmente, dividindo todos os termos de (**3.2-5**) por $sen^2\theta$, temos

$$\frac{sen^2\theta}{sen^2\theta} + \frac{cos^2\theta}{sen^2\theta} = \frac{1}{sen^2\theta},$$

ou seja,

$$\boxed{cot\,g^2\theta + 1 = cos\,sec^2\theta} \qquad \textbf{(3.2-7)}$$

que vem a ser a *Terceira Identidade Fundamental da Trigonometria*.

3.3 Funções trigonométricas

Nosso objetivo, nesta seção, é definir as funções trigonométricas elementares. Para tanto, utilizaremos uma circunferência especial e as razões trigonométricas recém-estabelecidas.

Definição 3.3-1

No sistema cartesiano de coordenadas, a *circunferência trigonométrica* é aquela que está centrada na origem ($C(0, 0)$) e tem raio igual a uma unidade de comprimento ($r = 1$).

Sendo $(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = r^2$ a equação de uma circunferência com centro no ponto $C(x_o, y_o)$ e raio r, vemos que $x^2 + y^2 = 1$ é a equação da circunferência trigonométrica.

Definição 3.3-2

Dizemos que um ângulo está na *posição padrão* em relação à circunferência trigonométrica, se possui

1. vértice coincidindo com o centro,
2. lados de comprimento igual ao raio $r = 1$, e
3. lado inicial situado sobre o eixo X.

Sempre que nos referirmos a um ângulo na posição padrão, estaremos querendo dizer que o mesmo satisfaz a definição acima. A **Figura 3.3-3** nos mostra ângulos α, β e θ na posição padrão.

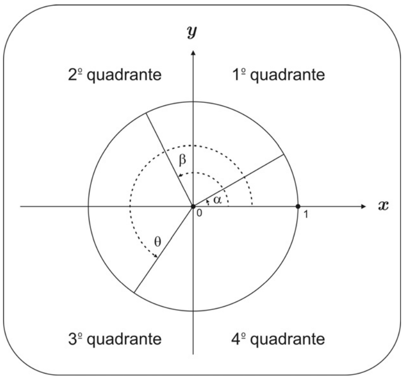


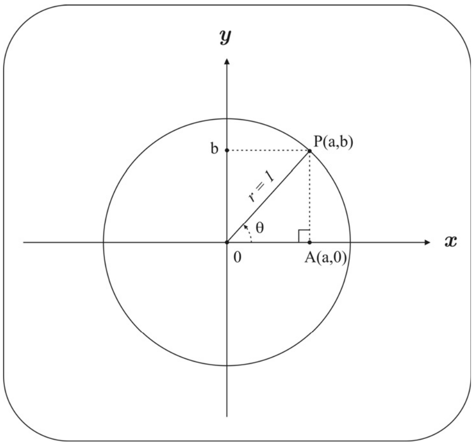
Figura 3.3-3

Definição 3.3-4

Se θ é um ângulo na posição padrão no primeiro quadrante e $P(a,b)$ é o ponto da interseção do lado terminal de θ com a circunferência trigonométrica (**Figura 3.3-5**), então $0P = r = 1$, $0PA$ é um triângulo retângulo e, tendo em vista as razões trigonométricas estabelecidas na seção anterior, as seis *funções trigonométricas elementares* do ângulo θ são

1. $y = sen\theta = b$
2. $y = cos\theta = a$
3. $y = tg\theta = \dfrac{b}{a} = \dfrac{sen\theta}{cos\theta}$
4. $y = cotg\theta = \dfrac{a}{b} = \dfrac{cos\theta}{sen\theta}$
5. $y = cossec\theta = \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{sen\theta}$
6. $y = sec\theta = \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{cos\theta}$.

Figura 3.3-5



A partir de agora, passaremos a reconhecer em cada uma das razões apresentadas em (**3.2-3**) uma função trigonométrica, ou função circular, da forma $y = f(\theta)$, com domínio, contradomínio e imagem que são subconjuntos de R, razão pela qual o radiano será adotado como unidade de medida padrão para ângulos. A medida de um ângulo em graus poderá eventualmente ser utilizada para efeito de esclarecimento, ou facilitação do entendimento, de alguma questão.

3.4 Valores das funções trigonométricas de ângulos especiais

Considerando as definições colocadas na seção anterior, a tabela a seguir exibe o seno, o cosseno e a tangente dos ângulos cujos lados finais coincidem com os eixos coordenados.

θ	$sen\theta$	$cos\theta$	$tg\theta$
0	0	1	0
$\dfrac{\pi}{2}$	1	0	*não definida*
π	0	-1	0
$\dfrac{3\pi}{2}$	-1	0	*não definida*
2π	0	1	0

Em sua parte (**a**), a **Figura 3.4-6** nos mostra como esses ângulos especiais estão dispostos na circunferência trigonométrica. Ainda podemos observar a localização de outros ângulos freqüentemente utilizados em cálculos envolvendo funções trigonométricas. Na parte (**b**) da mesma figura, são destacadas as determinações dos valores de seno, cosseno, tangente e cotangente, em seus respectivos eixos, para um ângulo θ qualquer.

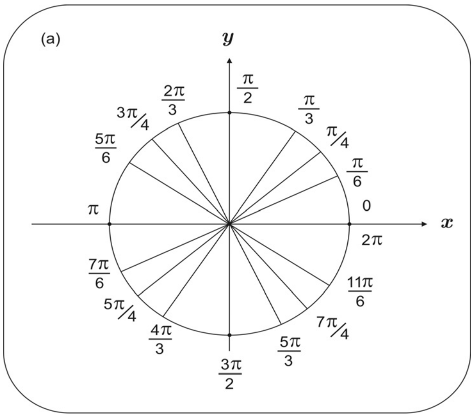
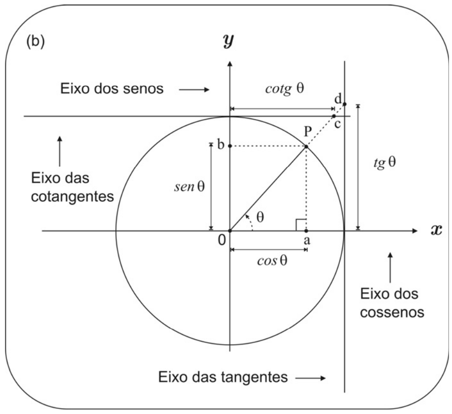


Figura 3.4-6



Encerramos esta seção, observando que as funções $sen\theta$ e $cos\theta$ estão definidas para qualquer valor do ângulo θ, tendo, portanto, como domínio todo o conjunto dos números reais. Já as funções $tg\theta$ e $sec\theta$ não estão definidas para ângulos da forma $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$, se $k = 0, 1, 2, \ldots$, pois estes possuem cosseno nulo.

Dialogando e Construindo Conhecimento

Que tal uma revisão no conteúdo da **Unidade I**, seção 3.6?

Ampliando o seu Conhecimento

A existência de $\cot g\theta$ e $\cos\sec\theta$ depende de θ não pertencer à família de ângulos $k\pi$, com $k = 0, 1, 2, \ldots$ Você sabe por qual motivo?

3.5 Olhando as funções seno e cosseno mais de perto

As funções seno e cosseno possuem propriedades bastante exploradas quando a trigonometria é aplicada na resolução de problemas teóricos e do cotidiano. Reservamos esta seção para a apresentação de uma seqüência de resultados que encerram algumas dessas propriedades.

Propriedade 1 (*Sinais das funções seno e cosseno***)**

Para $\theta \in [0, \pi]$, temos $sen\theta \geq 0$, e para $\theta \in]\pi, 2\pi[$, temos $sen\theta < 0$.

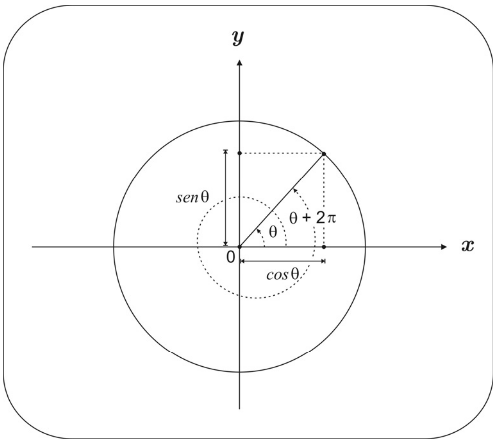
Para $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ou $\theta \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, temos $cos\theta \geq 0$, e para $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$, temos $cos\theta < 0$.

Propriedade 2

As funções seno e cosseno são periódicas com período 2π, ou seja,

$$sen(\theta + 2\pi) = sen\theta \text{ e } cos(\theta + 2\pi) = cos\theta.$$

Figura 3.5-1



Propriedade 3

O cosseno é uma função par e o seno é uma função ímpar (*Reveja a* **Figura 3.1.2-2**), ou seja, $cos(-\theta) = cos\theta$ e $sen(-\theta) = -sen\theta$.

Definição 3.5-2

Dois ângulos α e β são complementares se $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} rad$.

Propriedade 4

O cosseno de um ângulo é o seno do seu complemento (daí a denominação ***co***sseno), ou seja,

$$cos\theta = sen\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \text{ e } cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = sen\theta.$$

(*Procure fazer uma figura que lhe mostre a validade deste resultado*)

Propriedade 5

Valem as seguintes fórmulas de somas e diferenças:

a. $cos(\alpha + \beta) = cos\alpha cos\beta - sen\alpha sen\beta$

b. $cos(\alpha - \beta) = cos\alpha cos\beta + sen\alpha sen\beta$

c. $sen(\alpha + \beta) = sen\alpha cos\beta + cos\alpha sen\beta$

d. $sen(\alpha - \beta) = sen\alpha cos\beta - cos\alpha sen\beta$.

3.6 Representação gráfica das funções seno, cosseno e tangente

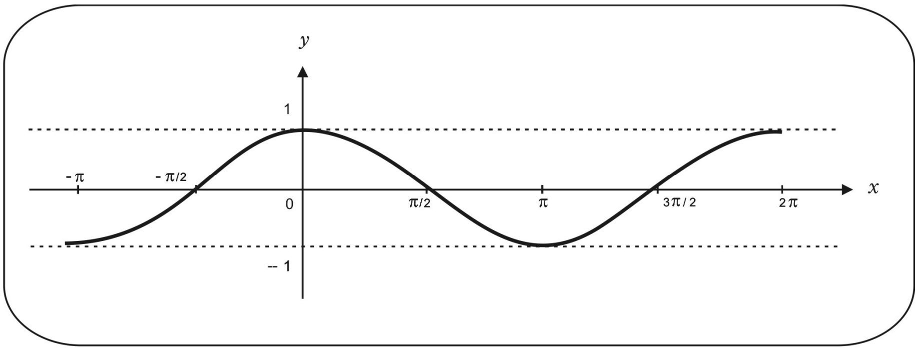
Para traçarmos o gráfico da função $y = cos\theta$, construímos a tabela abaixo

θ	$cos\,\theta$
0	1
$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2} \cong 0,83$
$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2} \cong 0,71$
$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{1}{2}$

θ	$cos\,\theta$
$\dfrac{\pi}{2}$	0
$\dfrac{2\pi}{3}$	$-\dfrac{1}{2}$
$\dfrac{3\pi}{4}$	$-\,0,71$
π	-1

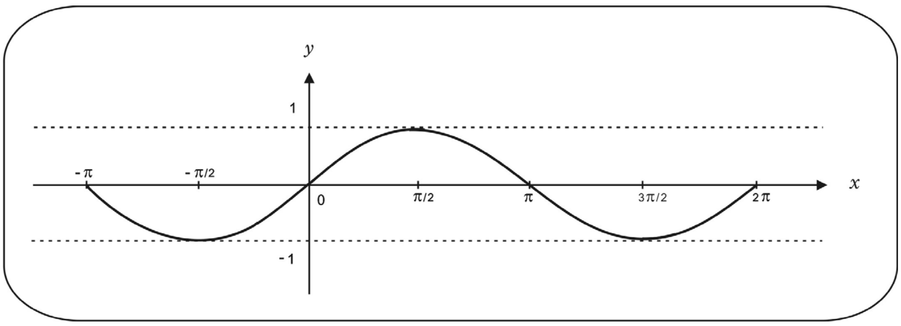
e, considerando os resultados contidos nas propriedades **1**, **2** e **3**, obtemos o esboço apresentado na **Figura 3.6-1**.

Figura 3.6-1



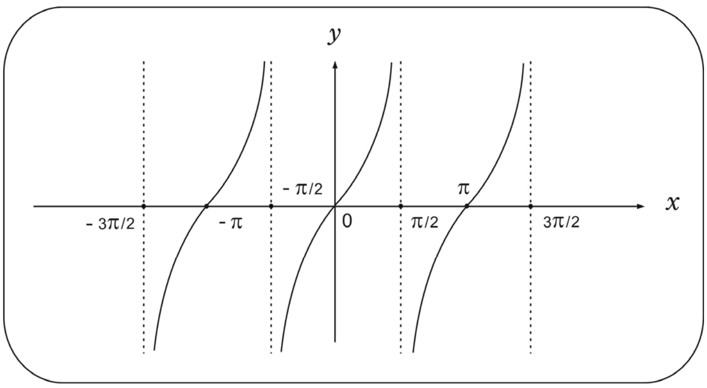
O gráfico de $y = sen\theta$ é uma mera translação do gráfico da função cosseno em $\dfrac{\pi}{2}$ unidades para a direita, já que $cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{2}\right) = sen\theta$ (Use as propriedades **3** e **4** para verificar isto!). Assim, temos

Figura 3.6-2



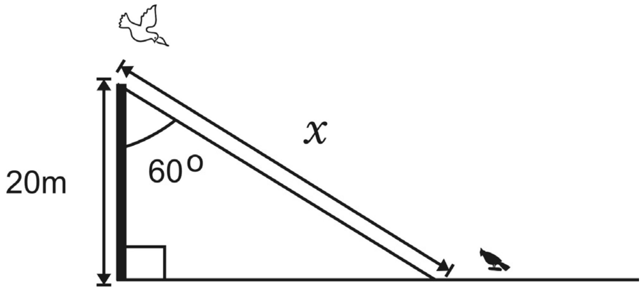
Agora você pode elaborar uma tabela como a apresentada no início desta seção, estabelecer as principais propriedades da função tangente e concluir que o gráfico de $y = tg\theta$ tem o seguinte esboço:

Figura 3.6-3



4. Avaliando o que foi construído

Lembra do problema do pássaro que precisava voar até o chão para salvar seu filhote? Pois bem, vamos resolvê-lo. Como dissemos, o problema é interessante e bastante simples. Na verdade, a resolução depende apenas do valor de $cos 60^\circ$, pois, de acordo com a figura abaixo, que elaboramos para retratar a situação apresentada no enunciado do problema, temos



$cos 60^\circ = \frac{20}{x}$, ou $x = \frac{20}{cos 60^\circ} = \frac{20}{1/2} = 40$ m.

No Moodle...

Concluindo, queremos lhe lembrar que após este primeiro contato com conceitos básicos da Trigonometria, você deve procurar a plataforma MOODLE para trabalhar no desenvolvimento de resultados relacionados às funções tangente, cotangente, secante e cossecante.
Você ainda terá oportunidade de por em prática seus conhecimentos nas aplicações elaboradas sobre o tema. Prepare-se para grandes descobertas! Até lá!

5. Referências

DANTE, Luiz R., Matemática: Contexto e Aplicações. Editora Ática, Vol. 1, 1a Edição, 1999.

IEZZI, G., Dolce, O., Murakami, C., Fundamentos de Matemática Elementar, Vol. 3, Editora Atual, 8a Edição, 2004.

LIMA, Elon L., Carvalho, P.C.P., Wagner, E., **A Matemática do Ensino Médio**, Vol. 1, 2ª Edição, Coleção Professor de Matemática, Publicação da Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.